Relatividad General

Notas del curso de la Facultad de Ciencias, UNAM

Darío Núñez
Juan Carlos Degollado

The Publisher $\boxed{\mathcal{ND}}$

Mantener viva la llama

Índice

1 Introducción **7**

2 Relatividad especial **9**

3 Diagramas de espacio-tiempo **17**

3.1 Transformaciones de Lorentz 22

3.1.1 Composición de velocidades 23

3.1.2 Parámetro de velocidad 24

3.1.3 Contracción de Lorentz 25

3.1.4 Tiempo propio 26

3.1.5 Dilatación temporal 26

3.1.6 Ejercicio 27

Prólogo

Estas notas han sido elaboradas para servir como base al curso de Relatividad que forma parte de las materias obligatorias en la carrera de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Los autores las hemos escrito y refinado conforme hemos impartido el curso, procurando discutir de la manera más intuitiva la generación de los conceptos requeridos para llegar a postular la interacción entre la materia y el espacio.

Para seguir el curso, es requisito sentirse cómodo en cálculo de varias variables; tener claros los conceptos de Física elemental: Mecánica, Electromagnetismo, Hidrodinámica. Ciertos conocimientos de ecuaciones diferenciales, son una buena ayuda y ... ¡Listo! Ganas de querer aprender. Estos son los ingredientes necesarios para poder seguir estas notas y entender los conceptos centrales que conducen a la teoría de la relatividad general.

El curso inicia con una revisión de las tranformaciones galileanas y el ver que éstas, no dejan invariante a la teoría electromagnética. Al buscar cuáles son las transformaciones que sí la dejan invariante, se determinan las transformaciones de Lorentz y, con ellas, surge el concepto de espacio-tiempo y la invariancia de la velocidad de la luz: esto es la relatividad especial. Se presentan varios casos donde se muestran cómo varían entonces conceptos tan arraigados e intuitivos, como la simultaneidad de dos eventos.

Al generalizar a las transformaciones de coordenadas, se introducen nuevos objetos geométicos caracterizados por su comportamiento bajo tranformaciones coordenadas en el espacio-tiempo, los tensores, luego describimos sus propiedades y caracteísticas.

Estudiamos con detalle la manera de pasar de leyes conocidas de la Física a la descripción del equivalente de dichas leyes, pero en el espacio-tiempo. Presentamos el movimiento de partículas libres; el campo electromagnético, las leyes de la hidrodinámica, de un modo intuitivo, pero sin perder la solidez matemática.

Dejamos para el final a la ley de la gravitación universal de Newton. Al estudiar su equivalente en el cuadriespacio, vemos la necesidad de introducir un nuevo tensor, el de Riemann y, uniendo lo aprendido sobre otras ramas de la Física, llegamos a la expresión de la ley de gravitación en el cuadriespacio, con una sorpresa, ¡no hay fuerza gravitatoria, hay geometría! Esta nueva relación son las ecuaciones de Einstein.

Presentamos un par de ejemplos de soluciones a las ecuaciones de Einstein, mostrando su derivación y discutiendo las características de dichas soluciones: la de hoyo negro y la del cosmos. Terminamos con un estudio del movimiento de partículas en el espacio tiempo del hoyo negro.

Los autores consideramos que, de este modo, los lectores han quedado con las bases necesarias para, en caso de que deseen, profundizar en los diferentes temas de la relatividad general y, para aquél, aquella, que se piensa dedicar a otra área, esperamos que le habrán quedado claros los conceptos fundamentales de una de las teorías más profundas que haya logrado la humanidad y que es un conocimiento que debe tener todo profesional de la Física. Reiteramos, no es un conocimiento para especialistas y que sólo pueden alcanzar cierto tipo de expertos; es una teoría con bases claras y conceptos perfectamente asequibles, claro, con dedicación.

Hemos diseñado una serie de ejercicios antes de cada tema y, de hecho, hemos escrito las soluciones en un apéndice, sugiriéndole al lector que intente dar su respuesta, antes de ver la nuestraRespecto a las tareas, es nuestra experiencia que los conceptos se aprenden en base al trabajo contínuo y cotidiano. Por ello sugerimos el intentar resolver los ejercicios antes de empezar el capítulo respectivo, avanzar un poco y seguir resolviéndolos conforme avanza en el capítulo. Posteriomente, ver nuestra respuesta.

El curso de la Facultad de Ciencias dura 16 semanas aproximadamente y, trabajando tres horas a la semana en el curso y por lo menos el mismo tiempo dedicado fuera del aula, se alcanza a cubrir el material y lograr aquirir los conocimientos básicos de la Relatividad General.

Hemos añadido las fotografías de los personajes que intervinieron el el desarrollo de esta gran teoría, aparte de que es agradable conocerlos, consideramos importante que se vea a esas personas como eso..., ¡personas!

Como libros complementarios a éstas notas, le recomendamos al lector unos clásicos: El libro de Taylor-Wheeler, primera edición, [**?**] para la parte de relatividad especial, y el libro de Weinberg [**?**] para la parte tensorial y de relatividad general. Se tiene también al clásico, el MTW [**?**] que nos parece muy útil para consultar, una vez que se ha entendido el tema y se desea profundizar. Recomendamos también al libro de Ligthman et al.[**?**], que contiene muchos problemas y sus soluciones.

Es nuestro deseo que disfrutes estas notas y te sean útiles

Instituto de Ciencias Nucleares Ciudad Univeristaria México 2013

Capítulo 1

Introducción

La Relatividad General describe una de las 4 interacciones fundamentales de la naturaleza, la gravitatoria. Modifica radicalmente nuestra concepción de espacio y tiempo, desecha la idea de fuerza gravitacional, ofreciendo en vez de ella el concepto de curvatura y postula una interdependencia entre la geometría del espacio-tiempo y la materia - energía presente en él. Es de gran belleza y aborda una amplia gama de situaciones, describiendo con precisión a la dinámica del Universo en su conjunto, la Cosmología, así como a fenómenos a escala del Sistema Solar. Es una teoría que describe consistentemente las observaciones cosmológicas más finas, prediciendo la existencia de nuevos tipos de materia, la llamada materia obscura, así como de, posiblemente, una nueva constante en el Universo, la constante cosmológica, Λ. Describe la formación y propiedades de los hoyos negros, inclusive el choque entre ellos; predice la existencia de perturbaciones en el espacio-tiempo, las ondas gravitatorias. Describe inclusive a objetos posiblemente hipotéticos como los hoyos de gusano.

Todos estos fenómenos y muchos más, están dentro de esta teoría y es la que se presenta y discute en estas notas.

La relatividad especial surge de la idea de que la Física vista en un sistema de referencia, sea claramente descrita en cualquier otro sistema de referencia inercial al primero, sin que ningún sistema sea más importante que ningún otro. Esta democratización conduce a un nuevo concepto donde se puede manifestar, el cuadriespacio. El querer estudiar estas relaciones en sistemas descritos en coordenadas curvilíneas, nos lleva a introducir objetos geométricos que tengan un comportamiento claro bajo cambios de sistemas de referencia, los tensores. Al notar que las coordenadas curvilíneas pueden, en sí, estar describiendo a un espacio curvo, se generaliza el concepto de movimiento libre en el cuadriespacio y, en general, se aprende a reescribir a las leyes conocidas de la Física, en este cuadriespacio con expresiones tensoriales. Al reescribir de este modo a la ley de fuerza gravitatoria de Newton, se llega a un nuevo paradigma, a que en sí, no hay fuerza gravitatoria, sino curvatura, la materia curva al espacio y la geometría determina al movimiento de la materia.

Ejercicios 1

1. Convertir las siguientes cantidades a sus equivalentes en unidades con $c = G = 1$ llamadas *Unidades naturales*:

   - La constante de Planck $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} J \cdot s$
   - Momento de una partícula $p = 3 \times 10^4 \ Kg \cdot m \cdot s^{-1}$
   - Presión atmosférica $P = 1 \times 10^5 \ N \cdot m^{-2}$
   - Densidad del agua $\rho = 1 \times 10^3 \ Kg \cdot m^{-3}$

2. Convertir de unidades naturales a unidades del SI

   - Velocidad $v = 1 \times \ 10^{-2}$
   - Tiempo $t = 1 \times \ 10^{18} m$
   - Aceleración $a = 10\, m^{-1}$
   - Presión $P = 1 \times \ 10^{19} kg \cdot m^{-3}$

3. Cuando se considera que las interacciones fundamentales son descritas por la gravedad relativista y la mecánica cuántica, se tiene que las constantes fundamentales de la naturaleza son la velocidad de la luz, c, la constante de gravitación universal, G y la constante de Plank, $\hbar$. Combinando dichas constantes, construye una cantidad con unidades de tiempo, de masa y de distancia.

4. Demostrar que las ecuaciones de Maxwell para los campos magnéticos y eléctricos no son invariantes ante trasformaciones de Galileo.

5. La vida media de un mesón π^+ es de $\bar{\tau} = 10^{-6}$ segundos. Si las partículas cósmicas los producen al chocar con los elementos de la atmósfera a una altura de 60 km. Dado que la velocidad promedio con la que viajan es muy cercana a la velocidad de la luz, calcula el tiempo que les toma llegar a la superficie de la Tierra, compáralo con su vida media y, con estos resultados, explica ¿Cómo es que se detectan en Tierra?

Capítulo 2

Relatividad especial

Uno de los conceptos más importantes, tanto por su utilidad como por su profundidad, es el de "¿Respecto a qué se mide (describe) un fenómeno físico?". En el léxico de la Física, a este *algo* respecto al cual se mide se le llama Marco o Sistema de Referencia. Es por esta pregunta que surge la relatividad especial, que a su vez dará paso a la relatividad general, la cual en cuántica ha generado no pocos dolores de cabeza. Como todo concepto profundo, no es trivial dar su definición, como tiempo, espacio, vida. Pero podemos decir algo así: *Un sistema de referencia es* **inercial** *en una cierta región del espacio y del tiempo cuando, en dicha región espacio-temporal y dentro de cierta exactitud, cualquier partícula prueba no experimenta ningún tipo de aceleración.*

Vemos entonces que este concepto es una idealización, una entelequia, no en un sentido peyorativo, sino en un sentido aristotélico de ser un objeto perfecto, del mundo de las ideas de Platón, pues nos habla de cosas ideales como la *partícula prueba*, que es un objeto que no modifica al espacio-tiempo, sólo lo siente, lo mide, el sistema inercial depende del tamaño de la región y de la exactitud que tengan los instrumentos que se utilicen para realizar las mediciones. Puede parecer alarmante que la definición de un concepto medular sea así, sin embargo, debe entenderse como una idealización no tan alejada de lo que pasa en la realidad. Pensemos en una superficie arbitraria. Ahora bien, imaginemos que en cada punto de dicha superficie, salvo algunos puntos patológicos, podemos pegar un plano tangente. Sí además es cierto que la zona de la superficie en una vecindad de dicho punto será parecida a la zona correspondiente en el plano tangente, entonces la Tierra me la puedo imaginar plana en una región alrededor mío y, no sólo imaginarla sino utilizar una física en esta Tierra plana, que funciona, describe correctamente, hasta cierta aproximación, los fenómenos que suceden en ella.

En fin, una vez que se definen sistemas inerciales, es decir, el lugar donde se modelan los fenómenos, uno se puede preguntar, qué pasa cuando se tienen dos sistemas inerciales, dos observadores inerciales estudiando el mismo fenómeno. Esto lo hemos visto desde mecánica clásica, donde lo que ve una persona se puede traducir a lo que ve otra persona que se mueve con **velocidad constante** respecto a la primera. Sabemos que un movimiento de caida libre para la primera persona se traduce en un tiro parabólico para la segunda, via las transformaciones galileanas:

$$\vec{x'} = \vec{x} + \vec{v_{\text{rel}}}\, t, \tag{2.1}$$

con $\vec{v_{\text{rel}}}$ la velocidad relativa entre los dos observadores. Entonces, derivando (2.1), la velocidad que mide cada observador es

$$\vec{v'} = \vec{v} + \vec{v_{\text{rel}}}, \tag{2.2}$$

al volver a derivar obtenemos que la aceleración que mide cada uno de ellos es igual,

$$\vec{a'} = \vec{a}, \tag{2.3}$$

por lo que la fuerza que calcula cada observador es la misma, es decir, ambos *ven* la misma segunda ley de Newton. Otra manera de decirlo es que las leyes de Newton son invariantes bajo transformaciones galileanas.

Como dichas leyes son la base para la física newtoniana, vemos que ella es invariante bajo transformaciones galileanas. Así, se tiene que lo que se concluya en un sistema de referencia inercial, es independiente de su estado de movimiento respecto a otros sistemas inerciales. Las fuerzas medidas en tal sistema son las mismas que se medirán en cualquier otro sistema inercial. Hasta este punto esta descripción es consistente, hasta que se postulan las leyes de Maxwell para el electromagnetismo, las ecs. de Maxwell no son invariantes bajo transformaciones galileanas.

Figura 2.1: James Clerck Maxwell, 1831 - 1879.

En efecto, las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\tfrac{\rho_Q}{\epsilon_0}, \qquad \epsilon_0\,\partial_t\,\vec{E}-\tfrac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}=4\,\pi\,\vec{j_Q},$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \qquad \tfrac{1}{\mu_0}\partial_t\,\vec{B}+\epsilon_0\,\vec{\nabla}\times\vec{E}=0,$$

bajo una transformación galileana, es decir, desde otro sistema de referencia, cambian su forma. Lo cual sí es preocupante, pues implica que la ecuaciones tienen esta forma sólo para un sistema de referencia, ¿cuál? y, al pasar a otro, ¿cambia entonces la física dependiendo de quién la vea? Esto claramente no suena bien y la comunidad interesada sí se preocupaba.

Por un lado, se postulaba el ether, no sólo como el medio en el cual se propagaban las ondas de luz, sino donde las leyes de Maxwell eran válidas y, por otro lado, se daba una intensa búsqueda teórica de soluciones alternativas.

Se trataba de entender la idea central de las leyes de la Física desde los distintos sistemas de referencia. Trabajaban inténsamente varios científicos, destacando Hendrik Antoon Lorentz, un científico holandés nacido en Arnhem, Holanda y muerto también en Holanda en 1928. Era un científico de amplio espectro. Buscó y encontró unas transformaciones entre sistemas de referencia que dejaran invariante a *los fenómenos eléctricos y ópticos*. Estaba muy consciente de la importancia física de este resultado. Manteniendo una amplia comunicación con Henri Poincaré.

Henri Poincaré era un gran científico francés, nacido en las vecindades de la ciudad ducal de Nancy, en el departamento de Meurthe-et-Moselle, en Francia, en 1854, muere en 1912 en Paris. Fue un científico muy prolijo, tanto en física como en matemáticas y trabajó muy activamente sobre el problema de las transformaciones de coordenadas. Como mencionamos, mantenía un estrecho contacto con Lorentz, enfatizando el sentido físico de sus trabajos. Ya en 1898 trabajaba con la idea de que la constancia de la velocidad de la luz debía tomarse como un postulado [**?**] y, conocía las transformaciones de Lorentz

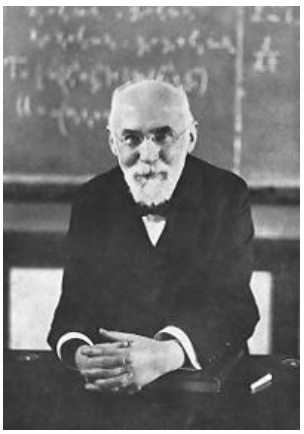


Figura 2.2: Hendrik Antoon Lorentz, 1853 - 1928.

[**?**]. Poincaré es el que le da nombre a muchos de los conceptos actuales, empezando por llamar *teoría de la relatividad* a este nuevo conjunto de conceptos, así como a las transformaciones entre sistemas de referencia propuesta por Lorentz, él es el que las llama *transformaciones de Lorentz*.

Figura 2.3: Henri Poincaré, 1854 - 1912.

Pero es Albert Einstein, un joven estudiante suizo, nacido en Ulm, Alemania en 1879, y muerto en 1955 en Princeton, Estados Unidos, el que se decide a dar a la luz a esta nueva teoría en 1905. De hecho, este 1905 fué un año fantástico para y Einstein, y para el desarrollo científico, pues publicó cinco trabajos, dos de los cuales son la base para el desarrollo de la física moderna. En lo que se refiere su trabajo sobre las transformaciones y la invarianza, en [**?**] enuncia el **principio de relatividad**, que tiene dos postulados:

1. Todos los sistemas inerciales son equivalentes.

2. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales.

De este modo, nace una teoría que va a ir mucho más allá de sus metas originales: por supuesto que deja covariantes a las ecuaciones de Maxwell; al tema del eter, no es que lo resuelva, sino que simplemente lo vuelve innecesario. Pero más allá de esto, nos habla de una nueva manera de concebir al mundo, por ahora quitándole el carácter absoluto a las distancias entre dos sucesos y al tiempo transcurrido entre

Figura 2.4: Albert Einstein, 1879 - 1955, premio Nóbel de Física 1921

ellos. De aquí surgirá la relación entre masa y energía, así como un gran número de fenómenos no intuitivos a la manera newtoniana de ver al mundo.

Es nuestra opinón que la teoría de la relatividad especial, ya estaba por ser descubierta. La comunidad científica rondaba cerca de ella. El que la haya propuesto una persona en específico es algo irrelevante, en cuanto a que si no lo hacía uno, lo hubiera hecho otro. Sin restar el mérito e ingenio de Albert Einstein, Lorentz y Poincaré, por mencionar a los más cercanos, estaban también ahí y jugaron un papel importante. Mencionamos este punto pues los autores estamos convencidos, en base a nuestra experiencia académica que la ciencia avanza como resultado de un esfuerzo colectivo. La física no es el trabajo de un solo hombre o mujer.

Vamos a ver que las transformaciones galileanas se generalizan, para cumplir con el principio de relatividad, a las transformaciones de Lorentz y que si bien el tiempo y el espacio pierden su caracter invariante, lo que va a ser invariante es un "mezcla" de los dos, una combinación que es el **espacio-tiempo**.

En términos mitológicos, para los griegos sería el hijo de Cronos, dios del tiempo y tal vez de la musa Urania. Interesante que las culturas mesoamericanas tenían ya un dios de la dualidad, los aztecas lo

Figura 2.5: Cronos y Urania.

conocan como Ometéotl, *el que se inventa a s mismo*, Moyocoyani. Es un concepto aún polémico en nuestra cultura, pero su existencia la sostienen científicos como León Portilla, Caso y Lopez Austin [**?**].

En lo que atañe a nosotros, hay evidencia de que los mesoamericanos tenían este concepto de una entidad que se manifiesta de diferentes formas, pero que es una sola; concepto que, junto a mucha cosas, fue perdido durante la invación y ocupación española y que ahora se retoma.

Figura 2.6: Quetzalcóatl (su nombre es ya una unión de opuestos), dios del viento, númen creador, señor de la vida. Con Mictlantecuhtli, dios de la muerte, formando una unidad, posiblemente representando a Ometéotl. Lámina 73 del códice Borgia.

La idea de unir al tiempo y al espacio, utiliza la noción de invariancia de la velocidad de la luz, al ser una constante fundamental de la naturaleza podemos medir al tiempo en centímetros considerando $t = c\,x$, con c la velocidad de la luz.

Así, para combinar el tiempo y al espacio podemos sumar, intervalos de tiempo, $c^2 d\,t^2$ con distancias $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Como veremos más adelante así se forma el concepto fructífero de **elemento de línea**, ds^2, en el **espacio-tiempo** (en coordenadas cartesianas):

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.4}$$

La cuestión de los signos es convención, igualmente podríamos considerar $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, sin olvidar que una vez que se elige una convención hay que seguirla, no podemos cambiarla a mitad del camino. Regresando al elemento de lnea, Minkowski dijo al respecto ... *Por ello, el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo, quedan condenados a desaparecer como meras sombras. Sólo una especie de unión de los dos mantendrá una realidad independiente.* [**?**]. Hermann Minkowski, nacido en Aleksota, reino de Polonia, en 1864 y muerto en Götingen, Imperio Alemán, en 1909, fue maestro de Albert Einstein y es el que plantea la descripción geométrica de la teoría de la Relatividad Especial como una teoría en el espacio-tiempo cuatridimensional como la conocemos ahora [**?**].

Ahora introducimos la notación de índices que usaremos durante el curso. El elemento de línea, Ec. (2.4), lo reescribiremos como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \tag{2.5}$$

Los índices griegos van de 0 a 3, 0 es la coordenada temporal, (mientras que los índices latinos van de 1 a 3 y estan asociados a las coordenadas espaciales). Hemos definido también a la métrica o tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ cuyas componentes en coordenadas cartesianas son,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 2.7: Hermann Minkowski, 1864 - 1909. El tiempo pierde su caracter absoluto.

y la diferencial $dx^\mu = (c\,dt, dx, dy, dz)$ así como la *convención de suma de Einstein* que nos dice que *índices repetidos arriba y abajo se suman.* En efecto, partiendo del elemento de línea dado en la ec. (2.5), sumamos primero sobre el índice μ, de cero a cuatro y despueés sobre el índice ν, quedándonos una suma con 16 términos que, al usar la forma del tensor de Minkowski y de la diferencial, se recupera la expresión ec. (2.4).

Es esta unión, esta nueva distancia ds^2 la que será invariante bajo transformaciones de Lorentz y, en general, bajo transformaciones de coordenadas.

Ejercicios 2

1. Sobre las curiosidades de la luz. El principio de la Relatividad Especial nos indica que la luz viaja a la misma velocidad en todos los sistemas de referencia. Las implicaciones de esto son enormes. Considera las siguientes preguntas:

   - Un observador moviéndose, con respecto a otro observador en reposo, a $0.9\,c$ y sosteniendo un espejo frente a él, ¿Cómo ve su imagen?
   - Si para un observador ha transcurrido un tiempo $\Delta\, t$, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido para un fotón en su sistema de referencia?

2. Un observador nota que el reloj de otro observador moviéndose relativo a él, funciona lento debido al movimiento relativo, ¿Verá, a su vez, el segundo observador que el reloj del primero también funciona lento? o ¿verá que funciona rápido?

3. ¿Significa la dilatación del tiempo que el tiempo en realidad pasa más lentamente en sistemas en movimiento relativo? ó ¿sólo parece que pasa más lento?

4. Dos eventos ocurren en el mismo lugar en el sistema de referencia del laboratorio y están separados por un intervalo de tiempo de 3 segundos.

   - ¿ Cuál es la distancia espacial entre éstos dos eventos en un sistema de referencia de un cohete en el que los eventos están separados 5 segundos?
   - ¿Cuál es la velocidad relativa v_{rel} entre el cohete y el laboratorio?

5. **Efecto de enfoque**. Un haz de luz se emite formando un ángulo ϕ' con respecto al eje x' del sistema de referencia del cohete. Muestra que el ángulo que tiene la dirección de este haz con respecto al eje x del sistema de referencia del laboratorio está dado por la ecuación:

$$\cos\,\phi = \frac{\cos\,\phi' + \beta}{1 + \beta\,\cos\,\phi'}, \tag{2.6}$$

   con $\beta = \frac{v_{\text{rel}}}{c}$. Ahora considera que se emite la luz se emite uniformemente en todas direcciones. Considera que el 50% de esta luz se va en la dirección hacia adelante en el sistema del cohete y que el cohete se mueve muy rápido. Muestra que en le sistema de laboratorio esta luz se concentra en un cono delgado hacia adelante cuyo eje coincide con la dirección de movimiento del cohete.

6. El eje temporal de un observador O', son los puntos que satisfacen $x' = 0$ y su línea de mundo se ve en el diagrama de espacio tiempo de O como una recta que hace un ángulo α con el eje t, además, está relacionado con la velocidad relativa v como: $\tan\alpha = v$. Mostrar que el ángulo que hace el eje x' con el eje x es también α.

Capítulo 3

Diagramas de espacio-tiempo

Para ayudarnos a entender este nuevo concepto de espacio-tiempo, como siempre, ayuda tener una representacion gráfica. En particular, aquellas que contienen información útil.

Los vectores en el espacio tiempo de Minkowski estan dados por sus componentes con respecto a un sistema coordenado y se denotan por x^μ. A los puntos del espacio tiempo de Minkowski los llamamos **eventos**. Las coordenadas de un evento $(c\,t, x, y, z)$, algunas veces se escribirán genéricamente como (x^0, x^1, x^2, x^3) o x^α. Como mencionamos, utilizaremos que los índices griegos toman valores de 0 a 3 y que los índices latinos toman valores de 1 a 3. La curva que describe un cuerpo A al moverse en este diagrama, se le conoce como **línea mundo**.

Veamos inicialmente cómo se relacionan los diagramas de espacio tiempo de dos observadores moviéndose a velocidad $\vec{v}$, constante, uno respecto del otro, es decir, dos observadores inerciales. Por simplicidad (e incapacidad de hacer dibujos en 4 dimensiones) tomamos un espacio tiempo de 2 dimensiones, la temporal y una espacial, que llamamos x. Consideramos que el observador O utiliza coordenadas $(c\,t, x)$ y el observador O', que se mueve en con velocidad v relativa a O, utiliza coordenadas $(c\,t', x')$. Supongamos también que el origen de coordenadas es el mismo para ambos inicialmente.

Considerando que uno de los postulados principales de la relatividad especial es el que la velocidad de la luz es un invariante para los sistemas coordenados, sacrificaremos la idea de dibujar ambos sistemas de referencia con ejes coordenados perpendiculares. Primero dejemos al sistema O con sus ejes perpendiculares, dado que la velocidad de un cuerpo es la pendiente de la recta, en nuestras coordenadas, con $c\,t$ y x, una recta con pendiente uno, es decir, a 45 grados, implicará una velocidad de c, es decir, la de luz. Esto es importante, **en los diagramas espacio-tiempo las rectas a 45 grados representan puntos moviéndose a la velocidad de la luz**. Un detalle. Es costumbre en relatividad especial, hacer estos diagramas poniendo al eje temporal en las ordenadas, a diferencia de como se usa ponerlo en otras disciplinas, como en mecánica. Esta es otra convención y es usual en relatividad, por lo que la respetamos en este texto. De este modo, un cuerpo moviéndose a velocidad v_x será descrito en estos diagramas con una recta con pendiente $m = c/v_x$.

Entonces, para dibujar al sistema O' junto con el O, consideramos que los orígenes coinciden inicialmente. El origen de O', que será el conjunto de puntos que satisfacen, en O', que $x' = 0$, se moverá, desde el punto de vista de O, como una recta con pendiente $m = c/v$, dado que consideramos que $v < c$, esta recta estará dentro del cono determinado por la recta a 45 grados y el eje $c\,t$. De este modo, el eje $c\,t'$, visto desde O, queda descrito por la rect $c\,t = (c/v)\,x$ y son los puntos que satisfacen, en O', que $x' = 0$. Dibujamos entonces una recta así y, para dibujar al eje x', que corresponde a todos los puntos que en O' están en el instante $c\,t' = 0$, recordamos que este observador O' también ve a la velocidad de la luz como la recta con pendiente 1. Por ello, dejando la idea de perpendicularidad en el diagrama,

dibujamos a la recta complemento de la que representa al eje ct' tal que la velocidad de la luz también bisecte a las rectas ct' y x', es decir, el eje x' es, para el eje x, el equivalente de lo que es el eje ct' para el eje ct. Ver figura (3.2).

Así tenemos a los dos sistemas de observadores, O y O' en relatividad especial, con ambos describiendo a la velocidad de la luz con la misma magnitud, c. Como vimos, el eje x' son todos los momentos que O' mide simultáneamente.

Para obtener una ecuación para el eje x' visto desde O, equivalente a la que obtuvimos para el eje ct', usamos el siguiente razonamiento. Ya vimos que la pendiente del eje ct', visto como recta en O es c/v_x, es decir, $\tan\alpha = c/v_x$, con α el ángulo que hace el eje ct' con la horizontal, con el eje x, entonces, el eje ct' hace un ángulo α_c con el eje vertical, ct, donde α_c es el ángulo complementario de α. Ahora, como el eje de luz bisecta tanto al sistema de ejes $ct - x$, como al sistema $ct' - x'$, sea γ el ángulo que hace el eje ct' con el eje de luz, entonces, hay un ángulo γ entre el eje de luz y el eje x', por lo que, $\alpha + \gamma$ debe ser igual a $\gamma + \sigma$, donde σ es el eje que hace el eje x' con la horizontal, el eje x. Por lo tanto, $\sigma = \alpha$, por lo que la pendiente del eje x' visto desde O es $m_1 = \tan\alpha = 1/\tan\alpha_c = v_x/c$. Con lo que conlcuimos que el eje x' visto desde O está descrito por la ecuación $ct = v_x/c\,x$, que son el conjunto de puntos, en O' que satisfacen $ct' = 0$.

Otra manera de convencernos de que el eje que dibujamos para que la velocidad de la luz bisecte al sistema (ct', x'), podemos marcar estos eventos en el diagrama de espacio tiempo de la siguiente manera. Para cualquier sistema, O o O', supongamos que a $ct' = -a$ se manda un rayo de luz. Este rayo tendrá como ecuación, visto en O, de $ct = -x + a\,(\cos\alpha - \text{sen}\alpha)$. El rayo llegará al punto $x = a$ en $ct' = 0$. Si el rayo es reflejado para llegar al eje temporal, llegará en $ct' = a$.
Si ahora dibujamos la trayectoria desde O y marcamos el rayo desde que sale en $t' = -a$ y un rayo que entra en $t' = a$, con ecuaci'on $ct = -x + a\,(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)$ el punto de intersección es el punto, visto desde O, $I = a\,(\text{sen}\alpha, \cos\alpha)$y, visto desde O' es $x' = a$.

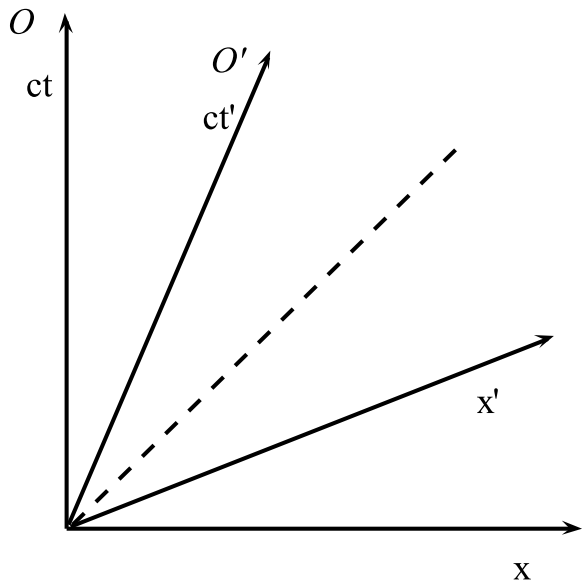


Figura 3.1: Diagrama espacio-tiempo de dos sistemas de referencia inerciales uno respecto del otro, para los cuales la velocidad de la luz, línea a trazos, tiene la misma magnitud en ambos, es decir, satisface el principio de relatividad especial. Nótese cómo la luz bisecta a ambos sistemas de referencia.

Tenemos entonces, dos puntos que definirán al eje x', visto desde O, el origen e I, $x' = 0$ y $x' = a$ y así podemos trazar la recta y ver que, en efecto es el eje que dibujamos. Podemos mostrar entonces que este eje de x' visto desde O tiene como ecuación $c\,t = (a\cos\alpha)/(a\text{sen}\alpha) = (1/\tan\alpha)\,x/c = (v/c)\,x$ y corresponde a los puntos con $t' = 0$.

La recta que describe a la luz forma un abanico hacia arriba y hacia abajo, con origen en O. Si dibujamos otro eje espacial, los argumentos se pueden repetir y nuestro abanico se convierte en un cono. Este cono se conoce como el **cono de luz** y va a ser una frontera muy importante para la física, como discutiremos más adelante. Todos las curvas que desde el origen están dentro del cono de luz, corresponden a eventos moviéndose a velocidades menores a la de la luz, se les llama *eventos tipo tiempo* y, para el elemento de línea Ec. (2.4), tenemos que $d\,s^2 < 0$. Todos los eventos sobre el cono de luz, se conocen, claro, como *eventos tipo luz* y su elemento de línea correspondiente es $d\,s^2 = 0$. Los eventos que son curvas del origen bajo el cono corresponden a cuerpos moviéndose a velocidades mayores a la de la luz, se les llama *eventos tipo espacio* y el elemento de línea para ellos es $d\,s^2 > 1$.

Vemos entonces que, en el espacio tiempo, las distancias no tienen por qué ser positivas definidas, como en la geometría euclideana. Este tipo de geometrías se les llama **geometría lorentziana** o pseudo-riemanniana. Las distancias entre dos eventos pueden ser cero sin que eso implique que son el mismo evento, de hecho, como vimos, son todos los puntos sobre el cono de luz.

Hipérbola invariante

Una vez que se conoce como estan relacionados ambos marcos de referencia es necesario calibrarlos uno con respecto a otro, para ello consideremos la ecuación

$$-\,c^2\,t^2 + x^2 = -a^2, \tag{3.1}$$

cuya gráfica, en el plano $t-x$, es una hipérbola, esta hipérbola pasa sobre todos los eventos cuyo intervalo al origen es a, pero debido a la invarianza del intervalo, estos eventos también estan sobre la curva

$$-\,c^2\,t'^2 + x'^2 = -a^2, \tag{3.2}$$

Para fijar ideas, tomemos $a = 1$, luego entonces, un evento A sobre el eje $c\,t$ tiene $x = 0$ asi que $c\,t = 1$ de igual manera, el evento B, que pertenece a la hipérbola tal que $x' = 0$ tiene $c\,t' = 1$, con este procedimiento podemos calibrar el eje $c\,t'$. Para calibrar el eje x' utilizamos el mismo procedimiento pero utilizando la familia de hipérbolas

$$-\,c^2\,t'^2 + x'^2 = b^2, \tag{3.3}$$

$c\,t = 0$, $x = b$ para un evento C, y el evento D, $c\,t' = 0$ satisface $x' = b$

Simultaneidad

En la figura (3.2) se muestran los diagramas de espacio-tiempo de dos observadores inerciales O y O' en movimiento relativo. En la figura estan marcados dos eventos, A y B. Para encontrar el instante en que ocurren los eventos para O se deben proyectar los puntos A y B sobre el eje $c\,t$ en forma paralela al eje x. Para los sucesos mostrados en la figura, se encuentra que ambos sucesos ocurren en el mismo instante para O. De la misma manera para encontrar el instante en que ocurren los eventos para O' se deben proyectar los eventos sobre el eje $c\,t'$ paralelamente al eje x', para los sucesos en la figura se encuentra que los eventos no ocurren de manera simultánea para O', el evento B. ocurre antes que el evento A. Así hemos mostrado que el concepto de simultaneidad no es absoluto como ocurre en la mecánica newtoniana sino que depende del observador.

Es importante recalcar que los tiempos $c\,t_{A\,B}$ y $c\,t'_A$ y $c\,t'_B$, son los instantes en que, para un tiempo

universal del sistema, ocurren los sucesos para los dos observadores; no son los tiempos en que los observadores *ven* los sucesos. Es posible encontrar los tiempos en los que los observadores ven los eventos.

Supongamos que los dos eventos consisten en destellos de luz que son emitidos en dirección de los observadores situados en $x = 0$. En la figura (3.3) se han graficado los mismos sucesos A y B con los rayos de luz que son emitidos en direción de los observadores, los instantes que los observadores ven, la luz emanada de A y B, se denotan por $ct^v{}_A$, $ct^v{}_B$, $ct'^v{}_A$,$ct'^v{}_B$ respectivamente. A pesar de que los dos sucesos ocurren simultáneamente para O, él registra el suceso A antes que el B, esto se debe a que el suceso A ocurre mas cerca de O.

También el observador O' registra el evento A antes que el evento B, la explicacion es la misma que el caso anterior, el evento A ocurre mas cerca de O' que el evento B.

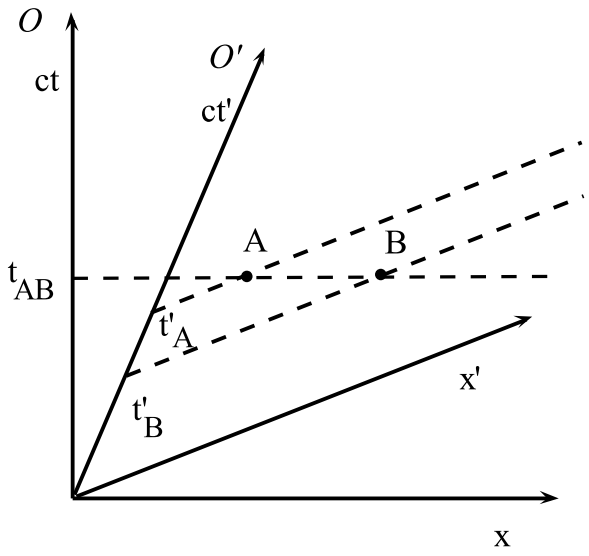


Figura 3.2: Aunque dos eventos sean simultaneos en un sistema de referencia pueden no serlo para otro sistema.

Causalidad

Para que dos eventos estén causalmente conectados algo debe propagarse desde el evento *causa* al evento *efecto*, en la figura (3.4) se muestra el diagrama de espacio-tiempo para dos observadores inerciales y dos eventos A y B ¿Pueden estos dos eventos estar causalmente conectados? es decir ¿podría ser A el efecto de B o viceversa? la respuesta es no como se concluye de la figura, para O el evento A ocurre antes que el evento B, mientras que para O' el evento A ocurre después que el evento B. Si por ejemplo, A fuese el evento de un jugador lanzando una pelota y B el evento de otro jugador recibiendo la pelota, para O no habría problemas de interpretación, se habría atrapado la pelota antes de haber sido lanzada. Pero, para O', ¡primero se atrapa la pelota y después es lanzada! Los eventos A y B de la figura no pueden estar por tanto, causalmente conectados.

Como veremos más adelante, esto se relaciona con el hecho de que ninguún cuerpo masivo puede viajar a la velocidad de la luz, su velocidad siempre es menor. Los cuerpos no masivos viajan a la velocidad de la luz. Así mismo, el carácter tipo espacio, luz o tiempo de un par de eventos se mantiene para todo

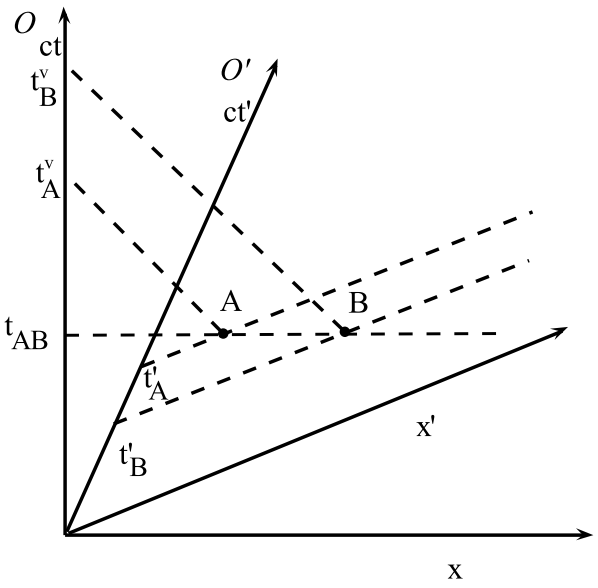


Figura 3.3: Es posible registrar como los observadores ven los eventos.

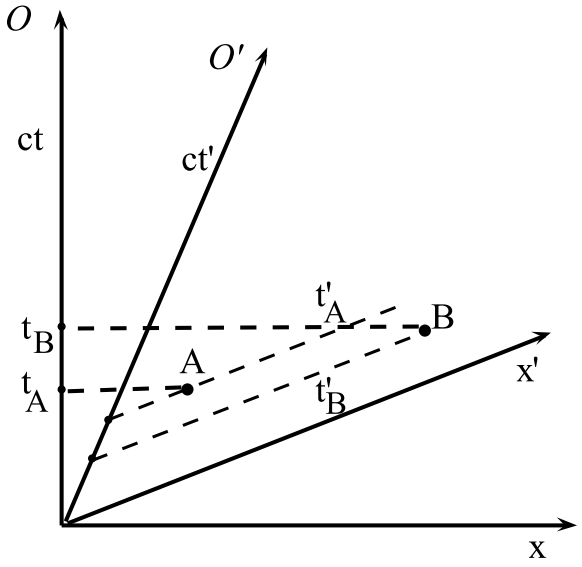


Figura 3.4: Los eventos A y B no pueden estar causalmente conectados. Para el observador O el evento A ocurre primero que B. Sin embargo para el observador O' Es el evento B el que ocurre primero.

sistema de referencia inercial, por lo que, si es tipo tiempo desde un sistema de referencia, lo será en cualquier otro sistema de referencia inercial. Por ello, los eventos fuera del cono de luz están causalmente desconectados, para todo sistema de referencia. Entonces, nada puede viajar a velocidades mayores a las de la luz. Si algo lo hiciera, violaría causalidad.

3.1 Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz son cambios de coordenadas que expresan las coordenadas de O' en términos de las de O. Si orientamos los ejes de tal modo que O' se mueva con velocidad v sobre el eje positivo de O la transformación lineal más general es de la forma:

$$c\,t' = k_0\,c\,t + k_1\,x, \tag{3.4}$$

$$x' = k_2\,c\,t + k_3\,x, \tag{3.5}$$

$$y' = y \tag{3.6}$$

$$z' = z \tag{3.7}$$

con k_μ constantes por determinar. Sabemos además que el eje x' tiene como ecuación en O, $c\,t = (v/c)\,x$ y el eje $c\,t'$: $c\,t = (c/v)\,x$ y sustituyendo en (3.4) y (3.5)

$$\left(k_0\,\frac{v}{c} + k_1\right)\,x = 0, \tag{3.8}$$

$$\left(k_2\,\frac{c}{v} + k_3\right)\,x = 0, \tag{3.9}$$

lo que implica que $v/c = -\frac{k_2}{k_3} = -\frac{k_1}{k_0}$, por lo que podemos escribir las transformaciones lineales como:

$$c\,t' = k_0\,(c\,t - \frac{v}{c}x), \tag{3.10}$$

$$x' = k_3\,(x - \frac{v}{c}\,c\,t). \tag{3.11}$$

Ahora, usamos que la velocidad de la luz tiene la misma magnitud para los dos observadores, es decir, $\frac{x}{c\,t} = \frac{x'}{c\,t'} = 1$, por lo que, al dividir ec. (3.10) entre ec. (3.11), obtenemos que $k_0 = k_3$.

Finalmente, otra información de la que disponemos, de hecho, que imponemos, es la invarianza del intervalo. Si sustituimos la forma diferencial de las transformaciones (3.10) y (3.11) en ds'^2 obtenemos:

$$\begin{aligned} ds'^2 = -c^2\,dt'^2 + dx'^2 &= {k_0}^2\left(-c^2\,dt^2 + 2\,v\,dt\,dx - \left(\frac{v}{c}\right)^2\,dx^2 + dx^2 - 2\,v\,dt\,dx + \left(\frac{v}{c}\right)^2\,c^2\,dt^2\right), \\ &= {k_0}^2(1 - \frac{v^2}{c^2})\left(-c^2\,dt^2 + dx^2\right), \end{aligned}$$

al imponer que esta expresión sea igual a ds^2, obtenemos que el coeficiente k_0 debe tener la forma:

$$k_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.12}$$

que nos conducen finalmente a la forma que deben tener las transformaciones entre sistemas de referencia para, tanto tener la misma magnitud de la velocidad de la luz en ambos sistemas, como para dejar invariante al elemento de línea, son las llamadas transformaciones de Lorentz para dos sistemas de referencia O, O', con O' moviéndose a velocidad v en la dirección x:

$$c\,t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,\left(c\,t - \frac{v}{c}\,x\right), \tag{3.13}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x - \frac{v}{c}\,c\,t\right), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

3.1.1 Composición de velocidades

Veamos ahora esta idea de que la velocidad de la luz es la misma para los diferentes sistemas, relacionados por medio de una transformación de Lorentz. Para ello, veamos la manera en la que se suman velocidades. Consideremos una partícula que se mueve a velocidad w en la dirección x medida por observadores en O, es decir $w = \frac{dx}{dt}$, vista desde O. En O' su velocidad será $w' = \frac{dx'}{dt'}$, que, desde la perspectiva galileana, sería la suma de w, la velocidad que tiene la partćula vista desde O, menos la velocidad con la que O' ve a O moverse, v. Utilizando las transformaciones de Lorentz (3.13) y (3.14), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{w'}{c} &= \frac{dx'}{c\,dt'} \\ &= \frac{(dx - \frac{v}{c}\,c\,dt)/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{(c\,dt - \frac{v}{c}\,dx)/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ &= \frac{\frac{dx}{c\,dt} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\,\frac{dx}{c\,dt}}, \end{aligned}$$

con lo que finalmente obtenemos

$$\frac{w'}{c} = \frac{\frac{w}{c} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\,\frac{w}{c}}. \tag{3.15}$$

Esta relación se conoce como la ley de composición de velocidades de Einstein. Como era de esperarse, no es la composición de velocidades galileana, ec.(2.2), sino que es algo más complicado, pero que, cuando las velocidades son pequñas respecto a la de la luz, se debe reducir al caso galileano. Recordemos, al decir que algo es chico, es importante aclarar respecto a qué. En la ecuación anterior podemos ver el caso en el que v y w son pequeñas respecto a la velocidad de la luz, por lo que $v/c << 1$ y $w/c << 1$, con lo que, $v\,w\,/c^2 << 1$ con mayor razón, por lo que podemos considerar al denominador igual a uno y, aquí v, w y w' son del orden, no se desprecia nada, pero, multiplicando por c, recuperamos la composici'on galileana, para la suma de velocidades entre dos observadores, con velocidad relativa $-v$.

Es interesante el caso en el que lo que se mueve sea un rayo de luz. Para O se tiene que $w = c$, que, en las ecuación que derivamos, ec. (3.15) implica

$$\frac{w'}{c} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}. \tag{3.16}$$

es decir, $w' = c$ también. Si un cuerpo se mueve a la velocidad de la luz en un sistema, se mover a la velocidad de la luz en otro inercial a él.

Vemos de este modo que se satisface uno de los postulados de la relatividad especial, que la luz se mueve a la misma velocidad en todos los sistemas de referencia inerciales.

Al revés, si por otra parte se tiene $w' = c$ por lo cual $w/c - v/c = 1 - vw/c^2$ y

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v}{c}\,\frac{w}{c} + \frac{w}{c} - \frac{v}{c} &= 0, \\ \left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{w}{c}\right) &= 0, \end{aligned}$$

que implica que $\Rightarrow w = c$ el cuerpo se mueve a la velocidad de la luz en O, (o que la velocidad relativa entre los sistemas es la de la luz, pero esto podría traer complicaciones, lo dejamos con la primera conclusión).

3.1.2 Parámetro de velocidad

En geometría euclídea, el cambio de coordenadas corespondiente a una rotación en el plano alrededor de un eje, deja invariantes las distancias medidas entre dos puntos, en dos dimensiones, una rotación de los ejes coordenados $x - y$ está dada por transformaciones de tipo:

$$x' = x\cos\phi + y\sin\phi$$
$$y' = -x\sin\phi + y\cos\phi$$

que dejan invariante el elemento de línea: $dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$.
Para el espacio de Minkowski las transformaciones que dejan invariante el elemento de línea son las de Lorentz que estudiamos en secciones anteriores, vamos a ver que existe una analogía que hace que las transformaciones de Lorentz se *vean* como rotaciones en ese espacio, para ello consideremos las transformaciones siguientes y estudiemos su relación con las de Lorentz:

$$x' = x\cosh\theta + t\sinh\theta \tag{3.17}$$

$$c\,t' = -x\sinh\theta + c\,t\cosh\theta \tag{3.18}$$

que es fácil mostrar que satisfacen $dx^2 - c^2\,dt^2 = dx'^2 - c^2\,dt'^2$.
θ tiene una interpretación muy sencilla, el origen de O' tiene $x' = 0$ que implica en (3.17) que

$$\frac{x}{c\,t} = \tanh\theta, \tag{3.19}$$

pero desde el punto de vista de O, el cociente $\frac{x}{c\,t}$ es precisamente la velocidad v/c del sistema O' entonces

$$\frac{v}{c} = \tanh\theta, \tag{3.20}$$

y se desprende que:

$$\sinh\theta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.21}$$

y

$$\cosh\theta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.22}$$

y sustituyendo en (3.17) y (3.18) se llega a las transformaciones de Lorentz (3.13) y (3.14). Consideremos la composición de velocidades estudiada en la sección anterior con un ejemplo sencillo: una partícula con parámetro de velocidad θ_1 relativa al sistema O' que se mueve con velocidad v (y parámetro de velocidad θ_2) con respecto al sistema de laboratorio O entonces el parámetro de velocidad medido por O es

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \tag{3.23}$$

ya que

$$\begin{aligned}\tanh\theta &= \tanh(\theta_1 + \theta_2),\\ &= \frac{\tanh\theta_1 + \tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1\tanh\theta_2}.\end{aligned}$$

Que es la composición de velocidades de Einstein, por éste motivo el parámetro de velocidad θ es la manera mas natural de medir velocidades asi como un ángulo es la manera natural de medir inclinación (y no las pendientes!).
El parecido entre la forma funcional de rotaciones y transformaciones de Lorentz no es una coincidencia, de hecho, una transformación de Lorentz general se define como *una tranformacion lineal y homogénea de coordenadas de x^μ a x'^μ tal que preserva el intervalo entre x^μ y el origen dado por $x^2 = \eta_{\mu\nu}x^\nu x^\nu = \mathbf{x^2} - t^2$*. Esto significa que la matriz Λ^μ_ν debe satisfacer

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \tag{3.24}$$

Este conjunto de transformaciones incluyen las rotaciones espaciales ordinarias. Para hacerlo evidente hay que tomar $\Lambda^0_0 = 1$, $\Lambda^0_i = 0$ y $\Lambda^i_j = R^i_j$ donde R es una matriz de rotación ortogonal.
El conjunto de transformaciones de Lorentz forma un *grupo*: el producto de cualquiera dos transformaciones de Lorentz es otra transformacion de Lorentz, el producto es asociativo, hay una matriz identidad $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ y cualquier transformacion de Lorentz tiene inversa. Para encontrar la inversa escribimos (3.24) como $\Lambda_{\nu\rho}\Lambda^\nu_\sigma$ y subimos el índice ρ en ambos lados para obtener $\Lambda^\rho_\nu\Lambda^\nu_\sigma = \delta^\rho_\sigma$ por lo tanto

$$(\Lambda^{-1})^\rho_\nu = \Lambda^\rho_\nu. \tag{3.25}$$

3.1.3 Contracción de Lorentz

Medir la longitud de una barra por ejemplo, es medir la distancia entre sus dos extremos en el mismo instante de tiempo, si la barra se mueve, la posición de los extremos debe determinarse simultáneamente para que la medición tenga sentido.

Si en un sistema de referencia se determina la posición de los extremos de la barra en el mismo tiempo, estas mediciones no ocurren simultáneamente en otro sistema de referencia que se mueve con respecto al primero. El que la simultaneidad no sea un invariante se puede ver fácilmete en un diagrama de espacio-tiempo. Este es el punto medular de todos los problemas que parecen paradójicos.

Por definición, la distancia entre dos puntos debe medirse simultáneamente y, a pesar de que este concepto depende del observador, podemos definir la **longitud propia** como *la longitud de un objeto medida en el marco de referencia en el cual está en reposo.* Si la barra esta en reposo en *O'* y las coordenadas de los extremos son x'_1 y x'_2 entonces la longitud propia de la barra es $L_0 = x'_2 - x'_1$. En el sistema que se mueve a lo largo del eje x con velocidad v respecto a *O'* se obtendra, a partir de las transformaciones de Lorentz, ec. (3.14) para cada punto

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x_1 + \frac{v}{c}\,c\,t_1\right),$$
$$x'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x_2 + \frac{v}{c}\,c\,t_2\right).$$

Pero, en O la medición se realiza simultáneamente, por lo que $c\,t_1 = c\,t_2$, por lo que la longitud de la barra en O, que es la distancia entre los puntos de la barra x_1 y x_2 medida, es decir $L = x_2 - x_1$. Se tiene por lo tanto, despejando a las x:

$$\begin{aligned} L = x_2 - x_1 &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(x'_2 - x'_1), \\ L &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L_0. \end{aligned}$$

Que nos expresa que un cuerpo se ve contraido, más chico, al ser medido en un sitema de referencia que se mueve respecto de él. Es la fórmula conocida como contracción de longitudes de Lorentz.

Nótese que es en la dirección donde está el movimiento. Las otras direcciones perpendiculares no sufren este efecto.

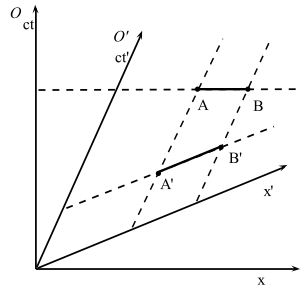


Figura 3.5: x.

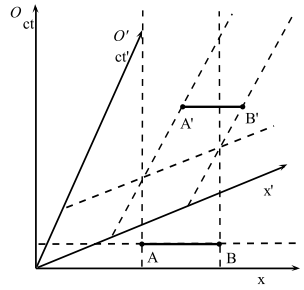


Figura 3.6: x.

3.1.4 Tiempo propio

Ya que definimos a la distancia propia, podemos mencionar al tiempo propio. Este es el tiempo que mide un observador, en reposo consigo mismo, es su tiempo. Por lo que el elemento de línea, ec. (2.4) con $dl^2 = 0$, la parte espacial se anula, el observador está en su origen, se tiene entonces $ds^2 = -c^2\,dt^2$, lo que nos da base para definir al **tiempo propio**, τ:

$$c^2\,d\tau^2 = -ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{3.26}$$

la signatura se refiere al tiempo, no al intervalo y es tiempo que, para el observador en su propio sistema de referencia, coincide con su propio tiempo.

3.1.5 Dilatación temporal

Para este observador en reposo consigo mismo, que no se mueve, el tiene y está en su origen y ve, como John Lennon, pasar el tiempo, puede medir cuánto tiempo pasó desde que empezó a medir. Es decir, su tiempo inical es $ct' = 0$ y pasaron tantos metros, ct'. Para un sistema de referencia que lo ve moverse, veamos cuánto tiempo pasó. De nuevo, usamos las transformaciones de Lorentz, considerando que, para

el sistema de John, *O'*, él no se está desplazando en el espacio, sólo pasó el tiempo, por lo que $x' = 0$, usamos la transformación inversa (que se obtiene al sustituir, $v \to -v$)

$$c\,t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(c\,t' + \frac{v}{c}\,x'\right), \tag{3.27}$$

pero, como $x' = 0$, tenemos que el tiempo que mide el observador que ve moverse a John es

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.28}$$

que, al estar dividido por una cantidad menor a uno, es mayor a t', el ve pasar un intervalo de tiempo mayor que el que mide. John, para el observador, se queda viendo al tiempo pasar un intervalo mayor.

Finalmente, mencionamos que todos los eventos que están separados tipo luz de un evento particular A estan sobre un cono cuyo vértice es A, este es *el cono de luz de A* y todos los eventos dentro del cono de luz son alcanzables para A y los que estan afuera no, estos últimos están causalmente desconectados.

Las transformaciones de Lorentz preservan la causalidad, para eventos tipo tiempo y tipo luz.

3.1.6 Ejercicio

A petición de l@s alum@s y para fijar ideas, veamos un par de ejercicios. Tomados del [**?**], 52 y 53.

La regla inclinada

Consideremos una regla de un metro paralela al eje x y que se mueve en la dirección y con velocidad v_y. En el sistema primado, que se mueve a velocidad v_x, en la dirección x (y x'), respecto del no primado, la regla se ve inclinada hacia arriba, en la dirección positiva de las x'. Explicar porqué pasa esto, primero sin ecuaciones y después calculando el ángulo θ' al que la regla está inclinada respecto al eje x'.

Esto tiene que ver con la idea de simultaneidad y su no invariancia para los diferentes sistemas de referencia. Consideramos que el tiempo inicial sea el mismo en ambos, $c\,t_0 = c\,t'_0 = 0$ y que, a ese tiempo, los orígenes coinciden con el centro de la regla. Ahora, con el dibujo del espacio tiempo, tengo el sistema con los ejes $(c\,t, x)$, la regla está sobre el eje x, con todos los puntos a $c\,t = 0$. Al ver a la regla desde el sistema $(c\,t', y')$, vemos que ya no todos los puntos están a $c\,t' = 0$, más bien, sólo el origen. Al trazar rectas paralelas a x' desde los puntos de la regla, vemos que las rectas de la parte derecha de la regla intersectan al eje $c\,t'$ en su zona negativa. Esto quiere decir que, para el sistema *O'*, ya pasaron por el tiempo $c\,t' = 0$. El punto medio está curzándolo y los puntos de la izquierda aún no lo cruzan. Por ello, para el observador en *O'* la regla está avanzando inclinadamente, con la parte dereche hacia adelante.

Dando valores, el extremo derecho de la regla, D, tiene coordenadas, en O, $(0, 1/2)$. En el sistema *O'*, con las transformaciones de Lorentz, vemos que las coordenadas de D son $(c\,t' = -v_x/2\,c, x' = 1/2)/\sqrt{1-(v_x/c)^2}$. Para determinar la posición del extremo D no a este tiempo $c\,t'$ negativo, sino al tiempo $c\,t' = 0$, donde sabemos que el centro de la regla está en $x' = 0$, hay que determinar su velocidad.

En O su velocidad es $(0, v_y)$. Por la composición de velocidades, ec. (3.15), en *O'* su velocidad en la dirección x es $v'_x = -v_x$, la relativa entre ambos. Para ver a la velocidad en la dirección y, es interesante notar que, si bien $y' = y$, $v'_y/c = dy'/(c\,dt')$, la y no cambia, ¡pero el tiempo sí!, entonces $v'_y = dy'/(c\,dt') = \sqrt{1-(v_x/c)^2}\,dy/(c\,dt)$, pues dx es cero. De donde obtenemos que la velocidad en la dirección y' es entonces

$$v'_y = \sqrt{1-(v_x/c)^2}\,v_y, \tag{3.29}$$

la velocidad en y, cambia, a pesar de ser dirección perpendicular, pues el tiempo cambia.

De este modo, el punto D de la regla estará, partiendo de que a $c\,t' = 0$, un tiempo $c\,t' = (v_x/2\,c,)/\sqrt{1-(v_x/c)^2}$ después en $y' = v'_y\,t' = \sqrt{1-(v_x/c)^2}\,v_y\,(v_x/2\,c,)/\sqrt{1-(v_x/c)^2} = v_x\,v_y/(2\,c^2)$. Y, x' será $x' = x'_0 + v'_x\,t'$, es decir, $x' = \frac{1}{2}\,\sqrt{1-(v_x/c)^2}$.

Con lo que podemos determinar que el ángulo que hace la regla respecto al eje x', es decir, la inclinación que tiene en el sistema O es θ' con

$$\tan\,\theta' = \frac{y'}{x'} = \frac{v_x\,v_y}{c^2\,\sqrt{1-(v_x/c)^2}}. \tag{3.30}$$

Claramente se ve que deben ir a velocidades relativista, tanto la velocidad entre los sistemas de referencia y (o) la regla para que esta inclinación sea perceptible. Sin embargo, es importante, es algo que pasa, chiquito o no, pero ocurre y es un fenómeno netamente relativista. De hecho, la inclinación del momento de espín del electrón al estar en órbita alrrededor de un núcleo, cambia su orientación y esto se puede medir y explicar con la descripción del cambio en la inclinación para distintos sistemas de referencia inerciales. Esto se conoce como la precesión de Thomas (ver ejercicio 103 del [**?**]).

Y, ahora sí, ya quedamos listos para ver el famoso problema de la varilla y el plano con hoyo. La idea es que van una varilla y un plano con hoyo moviéndose con velocidad constante. En su sistema de referencia tanto la varilla como el diámetro del hoyo miden exáctamente igual, digamos un metro para fijar ideas. La cosa es que la varilla se mueve en dirección perpendicular al la direcci'on en la que se mueve el plano con hoyo y, se ajusatn las cosas de modo tal que ambas llegan al mismo tiempo a un punto. Desde un sistema de referencia, el del plano con hoy, la varilla tiene una contracción de Lorentz, por lo que pasará limpiamente, sin embargo, desde el sistema de la varilla, lo que se contrae es el hoyo, por lo que no pasa y habrá una colisión. Esto sí es un problema, pues ambos sistemas de referencia son equivalente, por lo que no puede pasar una cosa en un sistema y otra muy distinta en el otro. Este tipo de problemas se les dice paradojas, pero más que paradójicos son malas interpretaciones de la relatividad. En fin, este es el famoso problema de la varilla y el plano con hoy y la pregunta es, ¿chocan o no?

Usando el problema anterior, vemos que ya se tien la respuesta: no chocan. En efecto, hay contracción pero, muy importante, el plano estará inclinado para la varilla, por lo que, por más que se contraiga, la varilla pasa y tampoco hay colisión es este sistema de referencia. Basta ver al plano con hoyo, como el sistema O, siendo la regla ahora el diámetro del hoyo y lo ajustamos en la dirección x. El sistema O' queda ahora representado por la varilla, con una velocidad relativa a O, dada por v_x. El plano se mueve en la dirección y, en O. Vemos que el problema queda perfectametne análogo al anterior, queda para el lector, de tarea, describir y mostrar que para la varilla, el plano se inclina. Finalmente, uno se puede preguntar, pero si la velocidad no es relativista, la inclinación es despreciable, por lo que ¡sí chocaría! Claramente es incorrecto, pues si la inclinación es despreciable, ¡también lo será la contracción de Lorentz! No hay colisión.

Ejercicios 3

1. **Orden temporal**
   El evento A, ocurre antes que el evento B. Muestra que el orden temporal de dos eventos en el sistema de referencia del laboratorio es el mismo que en el del sistema en movimiento si y solo si los eventos tienen una separación tipo luz o tipo tiempo.

2. **Una sucesión...**
   Un carro de juguete rueda sobre una mesa con velocidad v, un carro más chico rueda sobre el primero en la misma dirección con la misma velocidad v relativa al primero, un tercer carro rueda sobre el segundo en la misma dirección con velocidad relativa v y así sucesivamente hasta que son n carros, ¿Cuál es la velocidad v_n del *n-ésimo* carro en el sistema de referencia de la mesa? ¿A que valor tiende v_n conforme $n \to \infty$?

3. **Masa y energía**
   Considerando la ecuación $E = mc^2$, ¿Puede afirmarse que la materia se transforma en energía pura cuando viaja al cuadrado de la velocidad de la luz?

4. **Ley de la reflexión**
   Un espejo se mueve perpendicularmenete a su plano con velocidad v, un rayo de luz incide sobre su superficie a un ángulo θ medido desde la normal, ¿con qué ánguo es reflejado? ¿Cuál es el cambio en la frecuencia de la luz reflejada?

5. **Una paradoja...**
   Una barra, de $1m$ de longitud, que está en el eje x del sistema O se acerca al origen con una velocidad v_x. Una lámina paralela al plano x-z se mueve en la dirección y^+ con velocidad v_y. La lámina tiene un agujero circular de $1m$ de diámetro con centro en el eje y. El centro de la barra llega al origen de O al mismo tiempo (medido por O) que la lámina llega al plano $y = 0$. Como la barra sufre una contracción de Lorentz en O, fácilmente pasará por el agujero de la lámina y, por lo tanto, no habrá colisión y cada uno continuará su movimiento. Sin embargo, alguien que quisiera objetar esta conclusión puede argumentar lo siguiente: En el sistema O', en el que la barra esta en reposo, el agujero de la lámina sufre una contracción de Lorentz y por ello, el metro no podra pasar por el egujero contraído y por lo tanto debe haber colisión.
   Resuelve esta paradoja y responde ¿Hay o no colisión?

6. **Desintegración**
   Un pión π^0 que se mueve en la direción x con velocidad v, y decae en dos fotones idénticos en $x = 0$. En el sistema en que el pión esta en reposo, estos fotones se emiten en las direcciones positiva y negativa del eje y. Encuentra la energía de estos fotones en este sistema y las energías y direcciones de propagación de los dos fotones en el sistema de laboratorio.

Capítulo 4

Dinámica relativista

4.1 Cuadrivelocidad, cuadrimomento

El concepto de velocidad es el siguiente concepto fundamental después del de posición. De mecánica sabemos que $\vec{v} = d\vec{x}/dt$, pero ahora el tiempo tambiés es una coordenada, por lo que el parámetro respecto al cual medimos el cambio puede ser el tiempo propio, con la ventaja adicional de que es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Consideremos a **la cuadrvelocidad** definida como

$$u^\alpha = \frac{d\,x^\alpha}{d\,\tau}, \tag{4.1}$$

así tenemos una velocidad temporal, $u^0 = d\,c\,t/d\,\tau$ y velocidades espaciales, $u^i = d\,c\,x^i/d\,\tau$, unidas en un concepto de cuadrivelocidad. Ahora, podemos preguntarnos, ¿cuál es su magnitud en este cuadriespacio?

Al hablar de magnitud, recordamos una manera geométrica de medirla, por medio del producto punto, $|\vec{A}|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$, que, al escribirla como $|\vec{A}|^2 = \delta_{ij}\,A^i\,A^j$, donde estamos usando la convención de suma de Einstein y definiendo a la **delta de Kronecker**, δ_{ij}, descubierta, o propuesta (las matemáticas, ¿se descubren o se inventan?) por Leopold Kronecker y definida como

Figura 4.1: Leopold Kronecker, 1823 - 1891.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases} \tag{4.2}$$

Esto es una manera elegante de escribir $|\vec{A}|^2 = A^{x\,2} + A^{y\,2} + A^{z\,2}$, considerando $i = 1 = x, i = 2 = y$ e $i = 3 = z$. Pero no es sólo elegante, nos da una idea de que, para definir la magnitud del cuadrivector en el espacio tiempo, usemos al tensor de Minkowski:

$$|u^\alpha|^2 = \eta_{\mu\,\nu}\, u^\mu\, u^\nu, \tag{4.3}$$

El tensor de Minkowski, al darnos la magnitud de este vector, se le conoce como **tensor métrico**. Tiene la propiedad, que después veremos que no es sólo notación, de **bajar el índice** del cuadrivector u^ν. Es decir, definimos

$$u_\mu = \eta_{\mu\,\nu}\, u^\nu, \tag{4.4}$$

nótese la suma de Einstein en la parte derecha de la ecuación y, como debe ser, los índices libres de cada lado de la ecuación coinciden, en nombre y en posición. Los índices arriba se les llama **contra-variantes** y a los índices abajo los llamamos **co-variantes**. Regresaremos a ésto más adelante, por ahora lo dejamos como notación.

De este modo, la ecuación para la norma del cuadrivector, ec. (**??**), la escribimos como:

$$u_\alpha\, u^\alpha = \eta_{\mu\,\nu}\, u^\mu\, u^\nu, \tag{4.5}$$

y $u_\alpha\, u^\alpha$ denota, se lee como, *la norma del vector* u^α. Nótese el uso de índices mudos en la ecuación anterior, se les llama mudos, sólo que se suman, no están libres y, eso sí, los índices libres deben coincidir siempre en una ecuación, en nombre y posición. En la ecuación anterior no hay índices libres.

Pero hay más sorpresas. Recordando la definición del elemento de línea, ec. (2.5) y la de la cuadrivelocidad, podemos escribir el lado derecho de ésta última ecuación como

$$\eta_{\mu\,\nu}\, u^\mu\, u^\nu = \eta_{\mu\,\nu}\, u^\mu\, u^\nu = \eta_{\mu\,\nu}\, \frac{d\,x^\mu}{d\,\tau}\, \frac{d\,x^\nu}{d\,\tau}, \tag{4.6}$$

$$= \frac{\eta_{\mu\,\nu}\, d\,x^\mu\, d\,x^\nu}{d\,\tau^2} \tag{4.7}$$

donde hemos usado el hecho de que la diferencial de una función la podemos ver como el cociente de los incrementos diferenciales. y, recordando la definición de tiempo propio, ec. (3.26), tenemos el siguiente resultado:

$$u_\alpha\, u^\alpha = -c^2, \tag{4.8}$$

¡la norma de la cuadrivelocidad, de cualquier cuadrivelocidad, es negativa, es igual a menos el cuadrado de la velocidad de la luz! Tal vez conviene interpretar este resultado como que la velocidad en el espacio tiempo es un arreglo entre la velocidad temporal y la espacial (respecto al tiempo propio) y que, este arreglo es tal que que se mantiene constante.

Definimos al **cuadrimomento** como:

$$p^\alpha = m\, u^\alpha, \tag{4.9}$$

donde m es la masa en reposo de la partícula bajo estudio. La norma del cuadrimomento es

$$p_\alpha\, p^\alpha = -m^2\, c^2, \tag{4.10}$$

Con esta manera de ver a la velocidad y el momento en el cuadriespacio, tal vez no nos sonará tan extraño el siguiente resultado: como hemos visto con el cono de luz, en el cono avanzamos lo mismo en espacio que en la coordenada temporal, $x^0 = c\,t$, entonces para la luz, la velocidad temporal es igual a

la velocidad espacial y, dada la diferencia de signo, vemos que el intervalo, ec. (2.5) o el tiempo propio, ¡son cero!.

Dado que el tiempo propio, para la luz, es igual a cero, así como la masa del fotón, para definir al cuadrivector momento de la luz, usamos otro parámetro, λ, que se le conoce como **parámetro afín**

$$k^\alpha = \frac{d\,x^\alpha}{d\,\lambda}, \tag{4.11}$$

y su norma es cero,

$$k_\alpha\, k^\alpha = 0. \tag{4.12}$$

De este modo, vemos que, para partícula masivas, moviéndose con velocidades menores a las de luz, es decir, en el diagrama espacio-tiempo están **dentro del cono de luz**, pues su pendiente inversa (que como vimos es $1/m = 1/\tan\alpha = v/c$), da la razón de la magnitud velocidad espacial a la de la luz, que es menor a uno en este caso. Repetimos entonces, los eventos que están relacionados entre sí por señales propagándose a velocidades menores a las de la luz, están dentro del cono de luz y se les llama, eventos tipo-tiempo y, la norma de su cuadrivelocidad es $-c^2$, es decir la ec. (**??**), $u_\alpha\, u^\alpha = -c^2$. Los eventos relacionados entre sí con señales viajando a la velocidad de la luz, están **sobre el cono de luz**, se les llama eventos tipo luz y la norma de su cuadrivelocidad es cero, ec. (**??**), $k_\alpha\, k^\alpha = 0$.

Recordemos que en la física newtoniana de 3 dimensiones, la velocidad es un vector tangente a la trayectoria de la partícula. Siguiendo esta idea, en la geometría de cuatro dimensiones se define la 4-velocidad como el vector tangente unitario a la línea de mundo de la partícula en el sistema inercial, en el que la partícula está en reposo, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\frac{d\,c\,t}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau})$ y, como está en reposo, el tiempo coordenado coincide con el tiempo propio, por lo que $u^\mu = (c, \vec{0})$.

Una partícula acelerada no tiene un marco de referencia en el cual siempre este en reposo, sin embargo, hay un sistema inercial que instáneamente tiene la misma velocidad que la partícula. Este marco se llama *Marco de referencia momentáneamente comóvil*.

La 4-velocidad de una partícula acelerada se define como el vector tangente a la línea de mundo en ese marco de refencia de ése evento, éste vector es tangente a la línea de mundo de la partícula.

Como ya vimos, el cuadrimomento de define como $p^\alpha = m\,u^\alpha$. Para familiarizarnos con este concepto, consideremos una partícula de masa en reposo m, en el sistema de referencia O'. dicho sistema mueve con velocidad v en la direccion x respecto al marco de referencia O. ¿Cuáles son las componentes de su cuadrivelociad y del cuadrimomento en este sistema?

Básicamente, sólo tenemos que aplicar la transformación de Lorentz a la cuadrivelocidad que, en O tiene componentes $u^{\mu'} = (c, \vec{0})$. Vista desde O tendrá componentes

$$\begin{aligned} u^\alpha &= \frac{d\,x^\alpha}{d\tau}, \\ &= \frac{\Lambda^\alpha_{\beta'}\, d\,x^{\beta'}}{d\tau}, \\ &= \Lambda^\alpha_{\beta'}\, \frac{d\,x^{\beta'}}{d\tau}, \\ &= \Lambda^\alpha_{\beta'}\, u^{\beta'}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde usamos repetidas veces que el tiempo propio es un escalar, invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Como veremos más adelante, ésta manera de tranformarse de la cuadrivelocidad, se elevará a ser la definición de una cantidad vectorial. Por ahora lo dejamos en que es la manera en que se transforma

la velocidad y, para nuestro caso, obtenemos que, en O la velocidad que se observa tiene la forma

$$u^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \begin{pmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

por lo que, para el cuadrimomento, visto desde O tenemos:

$$p^\alpha = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \begin{pmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Nótese cómo, para un sistema de referencia que se mueva casi a la velocidad de la luz, la cuadrivelocidad y el cuadrimomento vistos desde O, divergen. Considermos conveniente dejar a la masa en reposo, m, como un número, y lo que crece y tiende a divergir es la velocidad relativa.

4.1.1 La acción de una partícula libre

Los conceptos de tiempo propio y velocidad que hemos discutido, nos permiten usar los principios variacionales en relatividad especial. En mecánica dichos principios nos permiten obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange al encontrar un extremo de la acción. Es un concepto muy profundo, pues está antes de las ecuaciones; se puede trabajar con ellas aún antes de formularlas.

Figura 4.2: Giuseppe Luigi comte de Lagrange, 1736 - 1813 y Leonhard Euler, 1707 - 1783.

En efecto, los principios variacionales son una herramienta muy poderosa y los usaremos durante el curso. Veamos por ahora el caso más sencillo de la acción para una partícula libre dentro de relatividad especial.

A partir de la acción, S, definida como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt, \tag{4.16}$$

con $\mathcal{L}$ la función Lagrangiana, una funcional que, para una partícula libre tiene la forma $\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2}$, construiremos la acción para el caso relativista.

La acción debe ser un escalar. De otra manera tendría un valor mínimo para un observador pero un valor distinto para otro, por lo que no se podría obtener un resultado general. En el caso de una partícula

libre el escalar más sencillo que puede construirse es el tiempo propio τ que, como vimos, ec. (3.26), es el tiempo que mide un observador en movimiento con la partícula. Escribamos entonces la acción relativista

$$S = K \int_{t_1}^{t_2} L d\tau \tag{4.17}$$

Con K una constante a determinar. De la ecuación del tiempo propio, ec. (3.26), reacomodando términos podemos reescribir (con $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$):

$$\begin{aligned} c^2\, d\tau^2 &= c^2\, dt^2 - dl^2, \\ &= c^2\, dt^2 \left(1 - \left(\frac{dl}{c\, dt}\right)^2\right), \\ &\equiv c^2\, dt^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right), \end{aligned} \tag{4.18}$$

es decir, $d\tau = dt\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$. De este modo, substituyendo en la acción relativista el lagrangiano para una partícula libre será

$$\mathcal{L} = K\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{4.19}$$

Consideremos el límite no relativista para dar un valor a K. En este límite $v/c << 1$, la norma de la velocidad es mucho menor a la de la luz y por tanto podemos hacer un desarrollo de Taylor a primer orden en $(v/c)^2$

$$\mathcal{L} \approx K\left(1 - \frac{v^2}{2\, c^2}\right) = K - \frac{K\, v^2}{2\, c^2}. \tag{4.20}$$

Identificamos el segúndo término con algo parecido a la energía cinética, que, de hecho, es lo que se obtiene en caso newtoniano. Por lo que, escogiendo $K = -m\, c^2$, recuperámos el término cinético de la teoría newtoniana. La Lagrangiana relativista queda

$$\mathcal{L} = -m\, c^2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \tag{4.21}$$

que, por construcción, tiene el límite no relativista correcto. La constante $-m\, c^2$ que queda en la lagrangiana en este límite no tiene relevancia, pues constantes no afectan a las ecuaciones de Euler - Lagrange.

A partir de la Lagrangiana, definimos el momento generalizado de la partícula libre relativista:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{4.22}$$

Nótese que hemos usado que $v^2 = \delta_{lm}\, v^l\, v^m$ y sacado la parcial de esto respecto a v^i. Nótese los índices y su posición.

Una vez que tenemos al momento conjugado, podemos construir el Hamiltoniano. El Hamiltoniano es una funcional (funcion de funciones) definida como

$$\mathcal{H} = p_i v^i - \mathcal{L}. \tag{4.23}$$

Substituyendo la expresión que obtuvimos para la Lagrangiana y para el momento, obtenemos que el Hamiltoniano para la partícula libre relativista es (usamos que $v_i\, v^i = v^2$)

$$\mathcal{H} = \frac{m\, c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{4.24}$$

Figura 4.3: Sir William Rowan Hamilton, 1805 - 1865.

Esta última expresión es muy interesante, ya que al identificar el Hamiltoniano con la energía total, E, nos indica que incluso para una partícula en reposo con $v = 0$ su energía no es cero, sino

$$E = m\,c^2. \tag{4.25}$$

La famosa fórmula de Einstein que relaciona la masa en reposo con la energía.

Figura 4.4: Centro financiero mundial de Taipei, el edicificio más alto del mundo en ese momento, en honor a los 50 años de la muerte de Albert Einstein, 18 de abril de 1955, organizó sus luces para mostrar la famosa ecuación.

Adem'as, le da un sentido a la componente temporal del cuadrimomento. En efecto, si se está en reposo, $\vec{v} = 0$, por lo que $\vec{p} = 0$, pero de la normalización del cuadrimomento, ec. (**??**), tenemos que en este caso, $p_0\,p^0 = -m^2\,c^2$, pero $p_0 = -p^0$, por lo que ${p^0}^2 = m^2\,c^2$, es decir $p^0 = m\,c$, concluimos que la componente temporal del cuadrimomento la podemos asociar con la energía en reposo:

$$p^0 = \frac{E}{c}, \tag{4.26}$$

las componentes del cuadrimometo las podemos expresar como

$$p^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{4.27}$$

Estos resultados nos permiten considerar el caso para una partícula sin masa como el fotón que, como ya vimos su norma en el cuadriespacio es cero y definir a sus componentes de la siguiente forma:

$$k^{\alpha} = \frac{\hbar\omega}{c}\,(1, \mathbf{n})\,, \tag{4.28}$$

con $\hbar$ la constante de Planck, ω la frecuencia angular del fotón y $\mathbf{n}$ un vector unitario que apunta en la

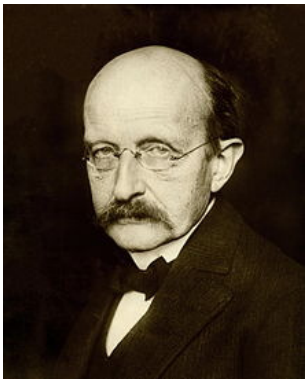


Figura 4.5: Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858 - 1947.

dirección de propagación.

De este modo vemos que, así como unimos a los conceptos de espacio y tiempo en un concepto vemos que los conceptos de energía y momento se unen en nuevo concepto, el cuadrimomento.

4.1.2 Conservación del cuadrimomento

Esta ley tiene un estatus de extra postulado, pues es uno de los muchos resultados cuyo limite no relativista es correcto, sin embargo, como los dos postulados fundamentales de la reltividad especial, ha sido ampliamente verificado y es de gran importancia para el estudio de colisiones entre partículas que se mueven con velocidades relativistas.

De este modo, postulamos: **El cuadrimomento total de un sistema, se conserva**:

$$\Delta\, {P_T}^{\alpha} = {P_T}^{\alpha}{}_{\text{final}} - {P_T}^{\alpha}{}_{\text{inicial}} = 0. \tag{4.29}$$

Nuevamente, dos leyes de conservación en mecánica se unen en una sola. La conservación de la energía y la conservación del momento lineal, se unen en la conservación del cuadrimomento.

4.1.3 Efecto Compton

Una consecuencia de la conservación del cuadrimomento es el resultado del proceso que consiste en considerar un fotón con cuadrimomento k^{α} que choca con un electrón en reposo. Se observa que el fotón cambia su frecuencia después del choque. Este resultado fue descrito por A. H. Compton y es uno de los resultados fundamentales en la fi'sica de partículas.

Para describir y cuantificar este cambio en la frecuencia del fotón, consideremos la ley de conservación del cuadrimomento, tomando en cuenta que, los cuadrivectores satisfacen el postulado de aditividad. Inicialmente a un electrón en reposo y a un fotón que colisiona con él. Como resultado, ambos se dipersan:

$${P_T}^{\alpha}{}_{\text{inicial}} = {k_0}^{\alpha} + {p_0}^{\alpha} = {k_f}^{\alpha} + {p_f}^{\alpha} = {P_T}^{\alpha}{}_{\text{final}}. \tag{4.30}$$

Figura 4.6: Arthur Holly Compton, 1892 - 1962, premio Nobel de Física 1927

donde p^α es el momento del electrón, k^α el del fotón y los subíndices o y f se refieren a los valores repectivos antes y después de la colisión. Ahora, sabemos que

$$\begin{aligned} {p_0}^\alpha &: (m\,c, 0), \\ {k_0}^\alpha &: \frac{\hbar\,\omega_0}{c}(1, \mathbf{n}_0), \\ {k_f}^\alpha &: \frac{\hbar\omega_f}{c}(1, \mathbf{n}_f), \\ {p_f}^\alpha &: (\frac{m\,c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \vec{p}_f). \end{aligned} \tag{4.31}$$

(4.32)

Reescribiendo ec. (**??**) como

$${k_0}^\alpha - {k_f}^\alpha + {p_0}^\alpha = {p_f}^\alpha. \tag{4.33}$$

Si hacemos el equivalente en cuadrivectores de elevar al cuadrado la ecuación de conservación, ec. (**??**), es decir, contraer con las expresiones contravariantes correspondientes, $k_{0\alpha} - k_{f\,\alpha} + p_{0\alpha}$, y $p_{f\,\alpha}$:

$$\begin{aligned} \left(k_{0\alpha} - k_{f\,\alpha} + p_{0\alpha}\right)\,\left({k_0}^\alpha - {k_f}^\alpha + {p_0}^\alpha\right) &= p_{f\,\alpha}\,{p_f}^\alpha, \\ -2\,k_{0\alpha}\,{k_f}^\alpha + 2\,\left(k_{0\alpha} - k_{f\,\alpha}\right)\,{p_0}^\alpha - m^2\,c^2 &= -m^2\,c^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $k_{0\alpha}\,{k_0}^\alpha = k_{f\,\alpha}\,{k_f}^\alpha = 0$, son vectores nulos, que $p_{0\alpha}\,{p_0}^\alpha = p_{f\,\alpha}\,{p_f}^\alpha = -m^2\,c^2$ y que $k_{0\alpha}\,{k_f}^\alpha = k_{f\,\alpha}\,{k_0}^\alpha$. Ahora, como $k_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\,k^\beta$, de ec. (**??**), obtenemos que $k_{0\alpha} : (\hbar\,\omega_0/c)\,(-1, \mathbf{n}_0), k_{f\,\alpha} : (\hbar\,\omega_f/c)\,(-1, \mathbf{n}_f)$, por lo que, desarrollando las componentes tenemos

$$\frac{\hbar\,\omega_0\,\omega_f}{c}\,\left(1 - \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{n}_f\right) - \left(\omega_0 - \omega_f\right)\,m\,c = 0$$

lo que, usando el producto punto usual nos lleva a la relación:

$$\frac{\hbar}{c}\,(1 - \cos\phi) - \frac{m\,c}{\omega_f} + \frac{m\,c}{\omega_0} = 0$$

con ϕ el ángulo entre las direcciones incidente y saliente de los fotones. Finalmente, con $c = \nu\,\lambda$, $\hbar = h/(2\,\pi)$ y que $\omega = 2\,\pi\,\nu$, con ν la frecuencia y λ la longitud de onda de los fotones, obtenemos la

relación entre las longitudes de onda de los fotones entrantes y salientes:

$$\lambda_f = \lambda_0 + \frac{h}{m\,c}\,(1 - \cos\phi)\,, \tag{4.34}$$

que es la relación de dispersión de Compton.

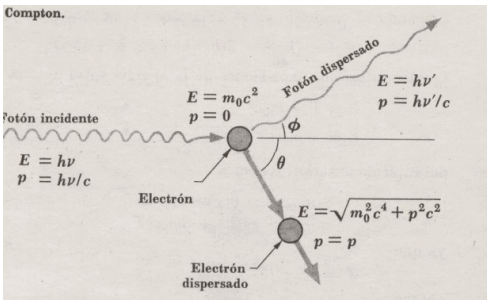


Figura 4.7: Diagrama del efecto Compton

Es interesante que el mismo resultado se puede obtener con conceptos casi totalmente clásicos: sin espacio-tiempo ni cuadri-vectores, ni masa nula del fotón, si consideramos al fotón y al electrón como un par de partículas clásicas, que chocan.

Consideramos al de electrón inicialmente en reposo, pero sí consideramos que tiene una energía en reposo, $E_{0e} = m_0\,c^2$, com m_0 la masa del electrón en reposo y $p_{0e} = 0$, su momento lineal inicial es cero. Respecto al fotón, consideramos que su energía inicial es $E_{0f} = h\,\nu$ y su momento inicial $p_{0f} = h\,\nu_0/c$. Despué del choque tenemos que el fotón sale formando un ángulo ϕ con la dirección de incidencia y el electrón un correspondiente ángulo θ. El fotón tendrá una nueva energía y un nuevo momento: $E_{f_f} = h\,\nu_f$ y su momento inicial $p_{f_f} = h\,\nu_f/c$, así como el electrón, $E_{f_e} = \sqrt{m_0{}^2\,c^4 + p^2\,c^2}, p_{f_e} = p$.

Resolviendo el problema como un problema clásico de conservación de energía y de momento lineal, tenemos conservación de energía y conservación de momento en las dos direcciones:

$$E: \qquad h\,\nu_0 + m_0\,c^2 = h\,\nu_f + \sqrt{m_0{}^2\,c^4 + p^2\,c^2}, \tag{4.35}$$

$$p_{\text{hor}}: \qquad \frac{h\,\nu_0}{c} = \frac{h\,\nu_f}{c}\,\cos\phi + p\,\cos\theta, \tag{4.36}$$

$$p_{\text{ver}}: \qquad 0 = \frac{h\,\nu_f}{c}\,\text{sen}\phi + p\,\text{sen}\theta. \tag{4.37}$$

Combinando las ecuaciones de los momentos para obtener una expresión para p^2 y otra para p^2 de la ecuación de conservación de energía e igualándolas obtenemos después de simplificar:

$$2\,h\,\left(\frac{\nu_0}{c} - \frac{\nu_f}{c}\right) - 2\,h^2\frac{\nu_0\,\nu_f}{c^2} = -2\,h^2\frac{\nu_0\,\nu_f}{c^2}\,\cos\phi, \tag{4.38}$$

con lo que, al escribir esta expresión en términos de la longitud de onda, λ, utilizando $\nu\,\lambda = c$, obtenemos diréctamente:

$$\lambda_f = \lambda_0 + \frac{h}{m_0\,c}\,(1 - \cos\phi)\,, \tag{4.39}$$

que es la expresión para el cambio en longitud de onda, la dispersión de Compton, que obtuvimos arriba con el tratamiento completamente relativista. Nótese que en este tratamiento clásico hay una mezcla de ideas clásicas y de cuántica primitiva, pero aún así nos dan la misma expresión para el cambio de longitud de onda del fotón, al ser dispersado por en electrón. Interesante.

Aniquilación de partículas

Otro ejemplo muy común es la aniquilación de una partícula con su anti-partícula. Consideremos la colisión de un electrón y un positrón que se aniquilan y producen un fotón, es decir, de acuerdo la siguiente reacción $e^+e^- \to \gamma$. Primero vamos a mostrar que no es posible este proceso.

$$p_-^\alpha + p_+^\alpha = k^\alpha. \tag{4.40}$$

Aún sin dar valores a las componentes, vemos que es posible ir al sistema de referencia de centro de masa, donce vería al electronón y al positrón acercarse al origen, con lo que el momento lineal total inicial sería cero, pero, por otro lado, el fotón ¡no puede tener momento lineal cero! La reacción que propusimos es incorrecta, se deben generar por lo menos dos fotones. Y tomemos ahora que el positrón choca con un electrón en reposo:

$$p_-^\alpha + p_+^\alpha = k_1^\alpha + k_2^\alpha, \tag{4.41}$$

donde tenemos que

$$\begin{aligned} p^\mu{}_- &: (m\,c, 0), \\ p^\mu{}_+ &: (\frac{m\,c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \vec{p}_f), \\ k^\mu{}_1 &: \frac{\hbar\omega_1}{c}\,(1, \mathbf{n_1})\,, \\ k^\mu{}_2 &: \frac{\hbar\omega_2}{c}\,(1, \mathbf{n_2})\,. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Contrayendo con los respectivos vectores covariantes:

$$\begin{aligned} (p_{-\alpha} + p_{+\alpha})\,(p_-{}^\alpha + p_+{}^\alpha) &= (k_{\alpha 1} + k_{\alpha 1})\,(k^\alpha{}_1 + k^\alpha{}_2)\,, \\ -m^2\,c^2 + p_{-\alpha}\,p_+{}^\alpha = k_{\alpha 1}\,k^\alpha{}_2, & \end{aligned} \tag{4.43}$$

tomando el cuenta las componentes de los vectores, considerarando cuidadosamente aquellos que son covariantes, se obtiene

$$m^2\,c^2\,\frac{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\hbar^2\,\omega_1\,\omega_2}{c^2}\,(1 - \mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2})\,, \tag{4.44}$$

y, nuevamente considerando a θ como el ángulo entre las dos direcciones de los fotones y las definicones de frecuencias y longitudes de onda del ejercicio anterior se obtiene:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{h^2\,(1-\cos\theta)\,\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{m^2\,c^2\,\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}. \tag{4.45}$$

Colisiones inelásticas

Como último ejemplo, veamos al equivalente al choque inelástico entre partículas relativistas. En un choque inelástico, las partículas cambian debido a su interacción. Consideremos por ejemplo el proceso conocido como *fotoproducción de piones* $\gamma + p \to \pi^+ + n$.

En esta reacción el protón *absorbe* al fotón transformando parte de su energía en masa para crear el pión y a un neutrón (la masa del protón es de 938,3 MeV g mientras que la del neutrón es de 939,5 MeV).

La energía mínima necesaria en este proceso es cuando se produce un pión y un neutrón y permanecen en reposo justo después de haberse producido (En el sistema de centro de momentos), de otra forma sería necesaria mas enegía para ponerlos en movimiento.

En el sistema centro de momentos el protón tiene un momento espacial que compensa el momento que tiene la partícula final. Visto desde el sistema de laboratorio la reacción se ve como si el pión y el neutrón se moviesen como si fueran una partícula cuya masa es la suma de las masas de ambas partículas. Consideremos la reacción:

$$p_p^\alpha + k^\alpha = p_{\pi+n}^\alpha, \tag{4.46}$$

contrayendo

$$2\, k_\alpha\, {p_p}^\alpha - m_p^2\, c^2 = -(m_\pi + m_n)^2\, c^2, \tag{4.47}$$

y en el marco de referencia de laboratorio $k : (\hbar\,\omega/c)\,(1, \mathbf{n})$ y $p : (m_p\, c, 0)$ así que

$$\hbar\omega = \frac{(m_\pi + m_n)^2\, c^2 - m_p^2\, c^2}{2\, m_p}, \tag{4.48}$$

que es la energía mínima o umbral que se requiere para producir un pión por medio de la reacción anterior.

Estos resultados son un ejemplo de la base conceptual, la relatividad especial, aplicada al estudio de las part'iculas elementales. Hay grandes y profundos desarrollos que se realizan en las instituciones de investigación del mundo, destacando los resultados de los grandes aceleradores, que nos acercan, a entender más sobre la naturaleza del micro-cosmos.

Figura 4.8: El Centro Europea de Investigación Nuclear, CERN, por sus siglas en francés, Conseil Européen pour la Reaserche Nucléaire, fundado en 1954, es uno de los aceleradores de partículas más importantes del mundo.

Ejercicios 4

1. **Cartesianas $\longleftrightarrow$ Esféricas**
   Dada la transformación de coordenadas cartesianas a esféricas

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x &= r\,\cos\phi\sin\theta, \\ y &= r\,\sin\phi\sin\theta, \\ z &= r\,\cos\theta, \end{aligned} \tag{4.49}$$

   y la transformación inversa

$$\begin{aligned} t &= t', \\ r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \tan\phi &= \frac{y}{x}, \\ 1/(\tan\theta) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{aligned} \tag{4.50}$$

   demuestra explícitamente que el elemento de línea se transforma de la siguiente manera

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \leftrightarrow ds^2 = -c^2\,dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\,d\phi^2\right), \tag{4.51}$$

2. **Geodésicas en la esfera**
   Considera una esfera de radio R. El elemento de línea en este caso esta dado por

$$ds^2 = R^2\left(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\,d\phi^2\right), \tag{4.52}$$

   Calcula explícitamente, a partir de la métrica g_{ij}, (Ahora los índices corren de uno a dos), los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\mu}$, obtén las expresiones para las ecuaciones de geodésicas y resúelvelas. Muestra que la métrica se transforma efectivamente como un tensor.

3. **Tensores**
   Demuestra las siguientes identidades:

   (a) $g_{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$. Recuerda que $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\nu}\,\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}$.
   (b) $g_{\mu\nu}\,g^{\nu\beta}{}_{,\gamma} = -g_{\mu\nu}{}_{,\gamma}\,g^{\nu\beta}$,
   (c) $g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -g_{\mu\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} - g_{\mu\alpha}\,\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}$

4. **Más geodésicas**
   Para el espacio descrito por

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dx^2}{t^2}, \tag{4.53}$$

   encuentra las ecuaciones geodésicas, resuélvelas y dibúja las trayectorias en un diagrama espacio-tiempo.

5. **Propiedades de la derivada covariante**
   Demuestra explícitamente:

(a) $\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, g_{\mu\nu}{}_{,\lambda}$,

(b) Para un tensor antisimétrico, $F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$, demuestra que

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \left(\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}\right)_{,\nu} \tag{4.54}$$

(c) Y que se satisface la relación cíclica:

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} \tag{4.55}$$

6. **Maxwell**
Utilizando este resultado, demuestra que cuando este tensor $F^{\mu\nu}$ es el de Faraday,

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{4.56}$$

son las otras cuatro ecuaciones de Maxwell.

7. **Más tensores**
Muestra que la derivada covariante de un vector covariante A_μ,

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\,\nu}\, A_\alpha, \tag{4.57}$$

es un tensor.

8. $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$
Demuéstralo, utilizando la relación

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu}\left(g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\nu}\right). \tag{4.58}$$

4.2 Espacio Curvo, tensores

La relatividad especial surge de la inquietud de considerar que los sistemas de referencia inerciales son todos equivalentes entre sí, no hay un sistema de referencia privilegiado. Hay, eso sí, sistemas que son más útiles para describir un fenómeno dado, en cuanto a la facilidad con lo que se pueden describir, pero no en cuanto a su valor intrínseco sobre los otros sistemas. Esto, aunado al postulado de la velocidad de la luz tiene la misma magnitud en todos los sistemas de referencia, llevó a Lorentz a mostrar el tipo de ecuaciones que relacionan la dinámica de un cuerpo visto desde un sistema de referencia, con la dinámica observada en otro sistema inercial.

Vimos que surge el concepto de espacio-tiempo, que es el que queda con sentido físico en cuanto a que es una función cuyo valor en cada punto del espacio tiempo, no cambia, mientras que el valor del tiempo y del espacio, sí lo hacen, se contraen, se dilatan e incluso pueden verse rotados, al ser observados en distintos sistemas inerciales. Vimos también que, al definir una velocidad y un momento es este cuadriespacio, surgieron la cuadrivelocidad y el cuadrimomento y, cuando medimos su norma, ésta resultó constante para todos los cuerpos, en el caso del cuadrimomento esta constante es la masa de la partícula en reposo. Concepto que tiene una iterpretación no tan intuitiva, pero que, vimos, es de gran utilidad al tratar problemas de colisión de partículas elementales. Vimos que el cuadrimomento reúne a los conceptos de energía y momento en una sóla entidad, mostraando una equivalencia entre la masa y la energía.

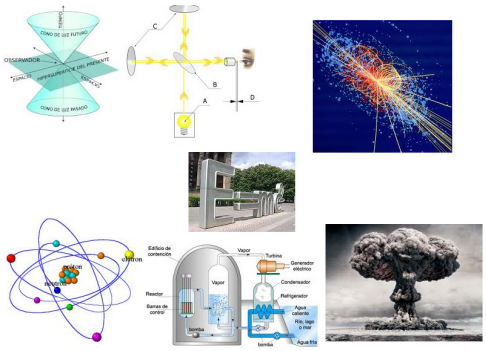


Figura 4.9: Conceptos y aplicaciones de la relatividad especial. Los conceptos de la relatividad especial nos han permitido entender mejor a la naturaleza, con resultados que verifican lo adecuado de sus descripciones. Desafortunadamente no nos han permitido entendernos mejor a nosotros mismos y a nuestra convivencia.

Las transformaciones entre sistemas de referencia, las estudiamos en el espacio tiempo plano, descrito en coordenadas cartesianas, ecs. (3.13, 3.14). Resulta natural el preguntarse ¿qué pasa si cambiamos estas condiciones? Si estudio al espacio tiempo en otras coordenadas, no planas, sino curvilíneas, como las polares o las esféricas que hemos usado en otros cursos de Física al resolver varios problemas. Las ideas y principios de covariancia, deben seguir siendo válidos. Después de todo, las coordenadas no están en el espaciotiempo, es algo que se usa para describir al fenómeno que estudio, para facilitarme su compresión. Sin embargo, el que todo funcione en otras coordenadas es algo que conviene mostrar.

Más aún, podemos nos preguntamos, ¿y si no es que las coordenadas sean curvilíneas, sino que resulta que sí, el espacio tiempo es curvo? Despues de todo, ¡vivimos en una superficie curva!, la Tierra, ¡es curva!

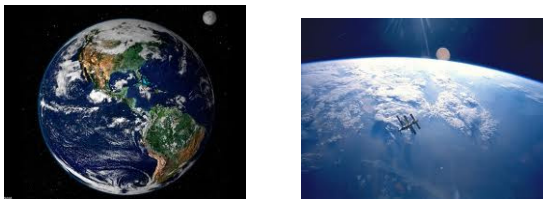


Figura 4.10: Imágenes de nuestra Tierra vista desde el espacio, claramente curva.

Las superficies curvas son algo natural, el que la descripción de la Física considerando al espacio plano sea adecuada, se debe a que las distancias, velocidades y desplazamientos son en regiones pequeñas (en muchos de los casos estudiados). Es de esperar que el principio de relatividad, la covariancia, sigan siendo válidas en espacios curvos.

Este estudio nos llevará a conceptos geoétricos totalmente independientes de las coordenadas específicas que se utilicen y nos permitirá describir a las ecuaciones de la Física de manera covariante. Para ello contruiremos a los tensores y a su álgebra.

Estos dos temas, relatividad especial y tensores, nos dejarán ya a un paso de la relatividad general.

Empecemos con una transformación de coordenadas sencilla, de cartesianas a esféricas

Es, como decíamos, un ejemplo de coordenadas son curvilineas. Que ya sea porque el problema se describe mejor en ellas o porque el espacio es curvo. Es una transformación de coordenadas como las que hemos visto $x^\mu \to x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\nu)$, paso de las antiguas a las nuevas, y en el caso de la transformación a coordenadas esféricas, dejando al tiempo sin transfomar:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= r\,\cos\theta\sin\phi, \\ y' &= r\,\sin\theta\sin\phi, \\ z' &= r\,\cos\phi, \end{aligned} \tag{4.59}$$

el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\,d\phi^2\right). \tag{4.60}$$

Ya no es una transformación de Lorentz, es simplemente un cambio de coordenadas. ¿Qu pasa con el principio de equivalencia y lo que hemos visto hasta ahora? Como ya mencionamos, construiremos la base que nos permitirá llegar a la Relatividad General, donde sus principios nos dicen que las leyes de la Física deben ser **covariantes**, es decir, independientes del sistema de referencia o de coordenadas que se utilize.

Antes de ello, mostraremos qué pasa con las distancias entre dos puntos en espacios curvos o en sistemas con coordenadas curvilíneas.

De la forma del elemento de línea en esféricas vemos que para ponerlo en notación de índices se debe escribir

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta, \tag{4.61}$$

donde $g_{\alpha\beta}$ es una matriz, de hecho veremos que es un tensor, y se le llama tensor métrico o métrica, que es función de las coordenadas y lo consideramos simétrico, es decir, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Para determinar la distancia más corta entre dos eventos, dos puntos del espacio tiempo, usaremos nuevamente el principio de acción, ec. (**??**).

Actualmente todas las teorías de la Física son derivables de un principio variacional, de una lagrangiana. Lo que no es trivial es postularla.

Para el espacio tiempo, eb donde queremos medir distancias y encontrar la distancia más corta entre dos eventos, el extremo entre dos puntos.

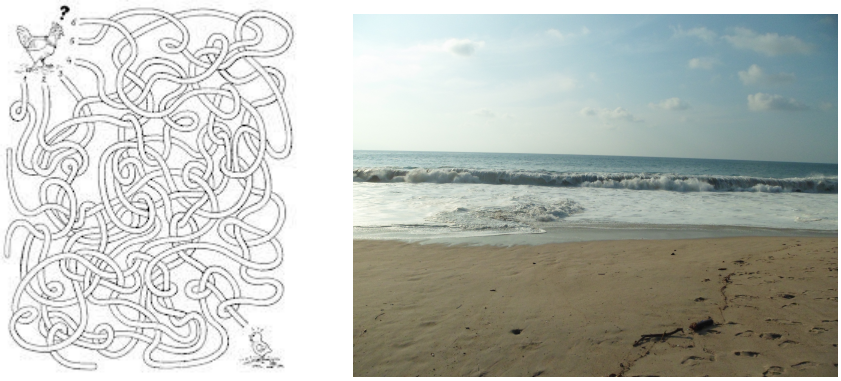


Figura 4.11: Hay que encontrar el mejor camino, no siempre es trivial.

Tenemos una integral sobre el elemento de línea, simplemente

$$S = \int ds, \tag{4.62}$$

con $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta}$, es decir, se tiene la acción

$$S = \int \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta}, \tag{4.63}$$

y queremos variarla con respecto a las coordenadas, δx^μ. Entonces

$$\delta S = \int \delta \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta}, \tag{4.64}$$

recordemos que la variación es como una derivada, y $\delta ds^2 = 2\, ds \delta ds$, por lo que $\delta ds = \frac{\delta ds^2}{2\, ds}$ y

$$\delta ds^2 = \delta g_{\alpha\beta} dx^\alpha\, dx^\beta + 2\, g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, \delta dx^\beta, \tag{4.65}$$

donde usamos que la métrica es simétrica y que los índices son mudos. Ahora, como la métrica es función de las coordenadas, usamos la regla de la cadena $\delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\nu}\delta x^\nu$. Notar que se usan comas para indicar derivadas: $A,\nu = \frac{\partial A}{\partial x^\nu}$. También se utiliza el hecho de que la variación y la diferenciación conmutan (esto se puede demostrar formalmente, nosotros lo tomamos como un hecho): $[\delta, d] = 0$, por lo que $2\, g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, d\delta x^\nu$, se conmutó y de nuevo se utilizó que los índices son mudos.

Ahora, se completa una derivada total, $d\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, \delta x^\nu\right) = d\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\right)\, \delta x^\nu + g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, d\delta x^\nu$, es decir, $g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, d\delta x^\nu = d\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, \delta x^\nu\right) - d\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\right)\, \delta x^\nu$. Y, el segundo término de la derecha se reescribe como $-d\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\right)\, \delta x^\nu = -\left(g_{\alpha\nu,\mu}\, dx^\mu\, dx^\alpha + g_{\alpha\nu}\, d^2x^\alpha\right)\, \delta x^\nu$, donde se ha usado la regla de la cadena. Finalmente obtenemos $-d\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\right)\, \delta x^\nu = -\left(\left(\frac{1}{2} g_{\alpha\nu,\mu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha}\right)\, dx^\mu\, dx^\alpha + g_{\alpha\nu}\, d^2x^\alpha\right)\, \delta x^\nu$.

Juntando todo estos resultados se tiene que

$$\delta ds^2 = -\frac{1}{2}\left(\left(-g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\mu\nu,\alpha}\right) dx^\alpha\, dx^\mu + g_{\alpha\nu}\, d^2x^\alpha\right)\, \delta\, x^\nu + d\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, \delta x^\nu\right). \tag{4.66}$$

Para que quede más compacto se define

$$\Gamma_{\alpha\mu\ \nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu}\right), \tag{4.67}$$

con lo que queda la siguiente expresión para la variación del cuadrado del elemento de línea.

$$\delta ds^2 = -\left(g_{\alpha\nu}\, d^2x^\alpha + \Gamma_{\alpha\mu\ \nu}\, dx^\alpha\, dx^\mu\right)\, \delta\, x^\nu + d\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, \delta x^\nu\right). \tag{4.68}$$

Regresando a la expresión para la acción,

$$\delta S = \int \delta ds = \int \frac{\delta ds^2}{2ds^2}\, ds = -\int \frac{\delta ds^2}{2d\tau^2}\, ds, \tag{4.69}$$

es decir, al substituir δds^2

$$\delta S = \int \delta ds = \int \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu}\,\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\mu\ \nu}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\, \delta\, x^\nu\, ds + \frac{1}{2}\int \frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, \delta x^\nu\right). \tag{4.70}$$

En el segundo término, vemos que queda una integral exacta y queda $g_{\alpha\nu}\, dx^\alpha\, \delta x^\nu$ evaluado en los extremos, pero en ellos $\delta x^\nu = 0$, por lo que este término es cero. Ahora, tomando el extremo, e igualando a cero, $\delta S = 0$, queda la integral de algo, multiplicado por $\delta\, x^\nu$ igualado a cero, pero como las variaciones son arbitrarias, ese algo debe ser cero, es decir, obtenemos la ecuación que nos da el extremo del elemento de línea, el extremo de la separación espacio temporal entre dos puntos:

$$g_{\alpha\nu}\,\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\mu\ \nu}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \tag{4.71}$$

multiplicando por el inverso del tensor métrico, $g^{\sigma\nu}$, es decir $g^{\sigma\nu}\, g\alpha\nu = \delta^\sigma_\alpha$, obtenemos finalmente

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \tag{4.72}$$

con

$$\Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu}\left(g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\nu}\right). \tag{4.73}$$

La ecuación de moviemiento que obtuvimos se conoce como **ecuación geodésica** y es la que deben satisfacer las trayectorias que minimizan (en sí, que dan un extremo) la distancia. La $\Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}$ se conocen como los **símbolos de Christoffel** y van a jugar un papel muy importante en el álgebra tensorial que veremos más adelante.

La ecuación geodésica nos habla de aceleraciones, de cuadriaceleraciones, $\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2}$ y si definimos a la cantidad $f^\sigma = \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}$ y la interpretamos como una una cuadrifuerza, se puede considerar a las ecuaciones de geodésicas como la versión relativista de la segunda ley de Newton. Siguiendo esta idea, dicha fuerza es algo, como vemos, puramente geométrico, no es ningún tipo de interacción sino que las modificaciones a la trayectoria, son debidas a la búsqueda de que dicha trayectoria sea el camino más corto en la geometría dada. Siguiendo esta idea, se puede pensar a los coeficientes métricos como potenciales.

Si bien la idea anterior es interesante y, de hecho, sí se relaciona a los coeficientes métricos con potenciales gravitacionales, la fuerza geométrica, como veremos más adelante, no es un concepto geométricamente bien definido, por lo que pierde su valor conceptual y queda en una mera analogía. Las curvas extremales en espacio curvo se llaman geodésicas.

Bueno, con esto empezamos a ver física en coordenadas curvilíneas, de hecho, en espacio curvo. También vemos la necesidad de contar con una manera de expresar a las leyes de la Física de un modo independiente de las coordenadas que se utilicen.

Figura 4.12: Elwin Bruno Christoffel, 1829 - 1900.

Para ello estudiaremos el álgebra tensorial. Fundamentalmente se basa en la manera en que los objetos cambian bajo una transformación de coordenadas. Supongamos entonces que tengo una variedad, un espacio-tiempo, al que describo por medio de las coordenadas x^μ y damos una transformación a otras coordenadas $x^{\nu'}$:

$$x^\mu \to x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\nu), \tag{4.74}$$

notemos que no hemos impuesto ninguna restricción sobre dicha transformación, por lo que no le podemos asociar ningún carácter geométrico. No hay un vector posición en este sentido. Al tomar la diferencial y usando regla de la cadena se obtiene:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu, \tag{4.75}$$

y a este comportamiento es a lo que le llamaremos **vector**, de hecho un **vector contravariante**. A la diferencial de la posición sí le podemos asignar un comportamiento definido bajo un cambio de coordenadas y generalizamos dicho comportamiento: Una cantidad A^μ es un vector si y solo si, bajo una transformación de coordenadas se transforma de acuerdo a la regla

$$A^\mu \to A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu. \tag{4.76}$$

Podemos definir ahora a un **escalar**, como aquel objeto que no cambia su magnitud bajo una transformación de coordenadas, es decir $\phi(x^\mu)$ es un escalar si y solo si, bajo una transformación de coordenadas se mantiene invariante:

$$\phi(x^\mu) \to \phi(x^{\mu'}) = \phi(x^\mu). \tag{4.77}$$

Aquí notemos que no tenemos índices libres, esto de los índices libres nos va a dar idea de que tipo de objeto es. Un objeto que ya conocemos que no tiene índices libres y por tanto es un escalar, es el elemento de línea, $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, si damos una transformación de coordenadas:

$$ds^2 \to ds^{2'} = g_{\mu'\nu'}\, dx^{\mu'}\, dx^{\nu'} = ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{4.78}$$

pero ya sabemos cómo se transforma $dx^{\mu'}$, por lo que obtenemos

$$g_{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{4.79}$$

es decir

$$g_{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}, \tag{4.80}$$

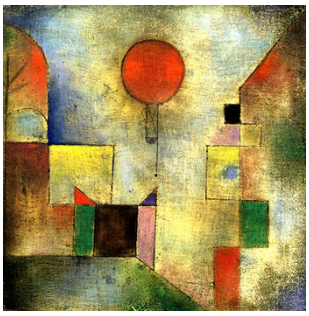


Figura 4.13: El globo rojo, Paul Klee

queremos ver cómo se transforma $g_{\mu'\nu'}$, debemos despejarla, para lo cual usamos que la parcial de una transformación por la parcial de la transformación inversa debe dar la identidad:

$$\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\nu\prime}} = \delta^{\mu'}_{\nu'}, \tag{4.81}$$

análogamente:

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu\prime}}\,\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{4.82}$$

Así, multiplicamos por $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\sigma\prime}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\tau\prime}}$:

$$g_{\mu'\nu'}\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\sigma\prime}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\tau\prime}} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\sigma\prime}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\tau\prime}}, \tag{4.83}$$

Es decir

$$g_{\mu'\nu'}\delta^{\mu'}_{\sigma'}\,\delta^{\nu'}_{\tau'} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\sigma\prime}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\tau\prime}}, \tag{4.84}$$

encontramos finalmente que

$$g_{\sigma'\tau'} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\sigma\prime}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\tau\prime}}, \tag{4.85}$$

que es la forma en la que se debe transformar la métrica para mantener invariante al intervalo de espacio-tiempo. Esto es lo que vamos a definir como un tensor covariante de dos índices, un objeto $T_{\mu\nu}$, que bajo transformaciones de coordenadas se transforma como

$$T_{\mu\nu} \to T_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu\prime}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu\prime}}\,T_{\alpha\beta}. \tag{4.86}$$

De aquí ya vemos cómo defimos a un objeto con un índice pero abajo, que será un **vector covariante**, a aquel objeto A_{μ} que, bajo una transformación de coordenadas se comoporta como

$$A_{\mu} \to A_{\mu'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu\prime}}\,A_{\alpha}. \tag{4.87}$$

y con esto podemos ya generalizar a objetos con mas índices, arriba y abajo, cada índice se debe transformar, es decir, un objeto $R^{\mu}{}_{\nu\sigma\tau}$, será un **tensor**, mixto de cuarto orden si, bajo una transformación de coordenadas se comporta como

$$R^{\mu}{}_{\nu\sigma\tau} \to R^{\mu'}{}_{\nu'\sigma'\tau'} = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu\prime}}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\sigma\prime}}\,\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\tau\prime}}\,R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}. \tag{4.88}$$

Una vez definidos los objetos podemos deducir varias operaciones válidas en álgebra tensorial. Sean $a, b, B^{\alpha}, T^{\alpha}{}_{\beta}, S^{\alpha}{}_{\beta}, R^{\mu}{}_{\nu\sigma\tau}$ tensores, entonces:

1. Combinación lineal: $P^{\alpha}{}_{\beta} = a\,T^{\alpha}{}_{\beta} + b\,S^{\alpha}{}_{\beta}$ es un tensor. Noten que para sumar dos tensores éstos deben ser del mismo tipo.

2. Producto directo $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} = R^{\alpha}{}_{\beta}\,B^{\gamma}$, es tensor

3. Contracción. Un índice covariante, abajo, con un índice contravariante, arriba. Se tiene una suma implícita y el índice desaparece, se obtiene un tensor de grado dos veces menor que el inicial: $T_{\nu\tau} = R^{\mu}{}_{\nu\mu\tau}$.

Nos falta una operación, la diferenciación, pero esa la veremos un poco más adelante. Para el producto directo, se da una transformacion de coordenadas y se obtiene

$$T^{\alpha'}{}_{\beta'}{}^{\gamma'} = R^{\alpha'}{}_{\beta'}\,B^{\gamma'} \tag{4.89}$$

como $R^{\alpha}{}_{\beta}$ y B^{γ} son tensores,

$$T^{\alpha'}{}_{\beta'}{}^{\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\sigma}} R^{\mu}{}_{\nu}\,B^{\sigma} \tag{4.90}$$

es decir

$$T^{\alpha'}{}_{\beta'}{}^{\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\sigma}} T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\sigma}, \tag{4.91}$$

por lo que es un tensor.

Otra operación es combinar producto directo y contracción,

$$A_{\mu} = S_{\mu\nu}\,B^{\nu}, \tag{4.92}$$

y se obtiene un tensor. Cuando se usa al tensor métrico, se dice que se le baja el índice:

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu}\,A^{\nu}, \tag{4.93}$$

y de este modo se relacionan un vector contravariante con uno covariante.

La diferenciación es una de las operaciones más importantes en la física y es necesario que tengamos esta noción para tensores. La idea es que cuando tengo una cantidad bien definida geométricamente, se le pueda derivar y se obtenga otra que también este bien definido (en el sentido que sigue las mismas reglas de transformación). Consideremos un cuadrivector A^{μ}. Al dar una transformación de coordenadas éste se transforma como, $A^{\mu} \to A^{\mu\prime} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}$. Ahora lo derivamos y tenemos un nuevo objeto, $B^{\mu}_{\nu} = A^{\mu}{}_{,\nu}$ y hay que ver cómo se comporta:

$$B^{\mu'}{}_{\nu'} = A^{\mu'}{}_{,\nu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\,A^{\alpha}\right). \tag{4.94}$$

Aquí hay que tener cuidado. el término entre paréntesis es una función de las coordenadas no primadas y, el operador que actúa sobre él es con respecto a las primadas, hay que hacer regla de la cadena. Veámoslo en general. Se tiene una función de las coordenadas no primadas: $f(x^{\alpha})$, le aplicamos el operador derivada con las primadas: $\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} f(x^{\alpha})$, uso regla de la cadena: $\frac{\partial f}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}$, lo reacomodamos para que se vea más claro: $\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} f$, como esto es para una función arbitraria, podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}, \tag{4.95}$$

que es justo la definición de transformación de un vector covariante, por lo que el operador de derivada es un vector covariante. Regresando a la derivación, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} B^{\mu'}{}_{\nu'} = A^{\mu'}{}_{,\nu'} &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right), \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\alpha}} A^{\alpha}, \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} B^{\alpha}{}_{\beta} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\alpha}} A^{\alpha}, \end{aligned} \tag{4.96}$$

no es tensor. Vemos que tenemos el primer término que se comporta como tensor, pero le sobra el segundo término, que involucra segundas derivadas. Era de esperarse pues la derivada es el cambio con respecto a las coordenadas que, a su vez, están cambiando. Este término que sobra, se puede reescribir de la siguiente forma, derivando a la delta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\delta^{\mu'}_{\nu'} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \right) \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} &= 0, \\ \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}} \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}\, \partial x^{\alpha}} &= -\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}\, \partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}}, \end{aligned} \tag{4.97}$$

por lo que la transformación de la derivada de un vector queda de la siguiente forma:

$$A^{\mu}_{,\nu} \to A^{\mu'}{}_{,\nu'} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}{}_{,\beta} - \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}\, \partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}} A^{\rho}, \tag{4.98}$$

Sea este término

$$\Gamma^{\tau}_{\sigma\,\alpha} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \xi^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial x^{\sigma}\, \partial x^{\alpha}}. \tag{4.99}$$

Notar, que $\Gamma^{\tau}_{\sigma\,\alpha}$ es un objeto simétrico en los índices covariantes.

Como se ha mencionado, dado un objeto con índices, no se puede concluir que es un vector, hay que estudiar su comportamiento bajo una transformación de coordenadas y ver si se transforma de acuerdo a las reglas dadas, en cuyo caso, será un tensor, de otro modo, no será un objeto geométricamente bien definido.

Veamos cómo se transforma esta $\Gamma^{\tau}_{\sigma\,\alpha}$. En coordenadas primadas tiene la forma

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu'}_{\nu'\,\lambda'} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu'}\, \partial x^{\lambda'}}, \\ &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \right), \\ &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\delta}\, \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\nu'}\, \partial x^{\lambda'}}, \\ &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\delta}\, \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}\, \partial x^{\lambda'}}, \end{aligned} \tag{4.100}$$

donde hemos usado el operador como parcial de las primadas y de las no primadas como corresponde. Obtenemos entonces la transformación para el $\Gamma^{\mu'}_{\nu'\,\lambda'}$:

$$\Gamma^{\mu'}_{\nu'\,\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\lambda'}}\,\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\nu'}}\,\Gamma^{\beta}_{\gamma\,\delta} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\,\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}\,\partial x^{\lambda'}}. \tag{4.101}$$

El objeto Γ no es un tensor. También le sobra un término como a la derivada del vector, compara con la ec. (**??**). La idea es tratar de juntar ambos problemas. Al definir una nueva operaci
on, que incluya y cancele los términos que le sobran a la derivada normal, construiremos un operador que generalize a la derivada, permitiéndonos que, al actuar sobre un objeto geométricamente bien definido, nos da un nuevo objeto, también geométricamente bien definido. Entonces, introducimos el operador de **derivada covariante**:

$$A^{\mu}{}_{;\nu} = A^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\,\alpha}\,A^{\alpha}, \tag{4.102}$$

este operador se reduce al operador de derivada usual cuando no estamos en coordenadas curvilíneas, pues en ese caso las transformaciones de coordenadas que dejan invariante al intervalo son lineales, como vimos, por lo que $\Gamma^{\mu}_{\nu\,\alpha} = 0$. Veamos cómo se transforma dado una transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned}
A^{\mu}{}_{;\nu} \to A^{\mu'}{}_{;\nu'} &= A^{\mu'}{}_{,\nu'} + \Gamma^{\mu'}_{\nu'\,\lambda'}\,A^{\lambda'}, \\
&= \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu\prime}}\,A^{\alpha}{}_{,\beta} - \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\,\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}\,\partial x^{\lambda'}}\,\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}}\,A^{\rho} + \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}\,\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\lambda'}}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\,\delta} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\,\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}\,\partial x^{\lambda'}}\right)\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}}\,A^{\rho}, \\
&= \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu\prime}}\,\left(A^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\,\rho}\,A^{\rho}\right), \\
&= \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu\prime}}\,A^{\alpha}{}_{;\beta},
\end{aligned} \tag{4.103}$$

vemos que ya queda la transformación como tensor. Con esta operación de derivada covariante, dado un vector, se deriva covariantemente y, bajo una transformación de coordenadas se transforma

$$A^{\mu}{}_{;\nu} \to A^{\mu'}{}_{;\nu'} = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu\prime}}\,A^{\alpha}{}_{;\beta}, \tag{4.104}$$

como un tensor mixto. Para un vector covariante, la regla para derivada covariante es:

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\,\nu}\,A_{\alpha}, \tag{4.105}$$

que es un tensor. Notemos cómo en ambos casos se reduce a la derivada normal para espacio plano descrito en coordenadas cartesianas.

Podemos entonces definir la derivada covariante de un tensor mixto:

$$R^{\mu}_{\nu\,\sigma\,\tau;\beta} = R^{\mu}_{\nu\,\sigma\,\tau,\beta} + R^{\alpha}_{\nu\,\sigma\,\tau}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\,\beta} - R^{\mu}_{\alpha\,\sigma\,\tau}\,\Gamma^{\alpha}_{\nu\,\beta} - R^{\mu}_{\nu\,\alpha\,\tau}\,\Gamma^{\alpha}_{\sigma\,\beta} - R^{\mu}_{\nu\,\sigma\,\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\tau\,\beta}. \tag{4.106}$$

Importante, la derivada covariante de un objeto escalar, coincide con la derivada normal:

$$\phi_{;\alpha} = \phi_{,\alpha}, \tag{4.107}$$

al derivar covariantemente a un escalar, se obtiene un vector covariante, geométricamente bien definido.

De este modo, terminamos de contruir el álgebra tensorial, sabiendo cómo se definen a los tensores de diferentes tipos y las operaciones de combinación lineal, producto directo, contracción, subir y bajar índices y diferenciación covariante.

Antes de pasar a otro tema les queremos mostrar la relación que hay entre la conexión afín, $\Gamma^{\mu}_{\alpha\,\beta}$ y la métrica.

Notemos primero que la derivada covariante satisface la regla de Leibnitz:

$$(A_\mu\, B_\nu)_{;\alpha} = A_{\mu\,;\alpha}\, B_\nu + A_\mu\, B_{\nu\,;\alpha}. \tag{4.108}$$

Al sacar la derivada covariante de un vector covariante se obtiene un tensor: $S_{\alpha\beta} = A_{\alpha\,;\,\beta}$. Se puede expresar a dicho tensor con el índice arriba: $S_{\alpha\beta} = g_{\alpha\,\mu} S^{\mu}_{\beta}$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\,;\,\beta} = (g_{\alpha\,\mu}\, A^{\mu})_{;\,\beta}\,, \\ &= g_{\alpha\,\mu}\, A^{\mu}_{\;;\,\beta} + g_{\alpha\,\mu\,;\beta}\, A^{\mu}, \\ &= g_{\alpha\,\mu}\, S^{\mu}_{\beta} + g_{\alpha\,\mu\,;\beta}\, A^{\mu}, \\ &= S_{\alpha\beta} + g_{\alpha\,\mu\,;\beta}\, A^{\mu}, \end{aligned} \tag{4.109}$$

por lo que $g_{\alpha\,\mu\,;\beta}\, A^{\mu} = 0$ y, como es para un vector arbitrario, concluimos que

$$g_{\alpha\,\mu\,;\beta} = 0. \tag{4.110}$$

Por otro lado, de la definición de derivada covariante

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\alpha\,\mu\,;\beta}, \\ &= g_{\alpha\,\mu\,,\beta} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\, g_{\nu\,\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\beta}\, g_{\alpha\,\nu}, \end{aligned} \tag{4.111}$$

usando que el tensor métrico es simétrico, así como los índices covariantes de la conexión afín, llego finalmente a la expresión:

$$\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu} \right). \tag{4.112}$$

que se les llama los símbolos de Christoffel y son los mismo que aparecieron cuando derivamos la ecuación geodésica. Los símbolos de Christoffel son la conexión afín.

Ejercicios 5

1. Demuestra explícitamente que:

   (a) $\Box\,\phi = 0$, con $\Box = g^{\mu\,\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu$, y ϕ una función escalar, se puede reescribir como

   $$\Box\,\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\,\nu}\,\phi_{,\nu}\right)_{,\mu}.$$

   Al operador $\Box$ se le conoce como **D'Alambertiano**.

2. Utilizando el cuadripotenical electromagnético, A_μ, que se relaciona con el tensor de Faraday $F_{\mu\,\nu} = A_{\mu;\,\nu} - A_{\nu;\,\mu} = A_{\mu,\,\nu} - A_{\nu,\,\mu}$ (muestra ésta última igualdad). Escribe las ecuaciones de Maxwell, ${F^{\mu\,\nu}}_{;\,\nu} = 0$ y $F_{(\mu\,\nu\,;\lambda)} =$ en términos de este cuadripotencial

3. Considera un espacio de 2 dimensiones con métrica

   $$ds^2 \;=\; \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{r^2 - a^2} - \frac{r^2\,dr^2}{\left(r^2 - a^2\right)^2}$$

   donde $r > a$, demostrar que las ecuaciones de las geodésicas se pueden escribir como

   $$a^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + a^2\,r^2 \;=\; K\,r^4.$$

   donde K es una constante tal que $K = 1$ si la geodésica es nula. Si hacemos $r\frac{d\theta}{dr} = \tan\,\phi$, demuestra que este espacio se mapea en el plano euclideano con coordenadas polares (r, ϕ) y que las geodésicas se mapean en líneas rectas.

4. Considera el tensor de energía esfuerzos de un fluido perfecto:

   $$T^{\mu\nu} = \rho_0\,c^2\,h\,\frac{u^\mu\,u^\nu}{c^2} + p\,g^{\mu\nu},$$

   con ρ_0 la densidad de energía en reposo, h la entalpía por unidad de energía, definida como $h = 1 + \epsilon + \frac{p}{c^2\,\rho_0}$, con ϵ la energía interna y p la presión. Demuestra que:

   (a) $T_{\mu\nu}\,u^\mu\,u^\nu = \rho_0\,c^2\,(1+\epsilon) \equiv \mu$, lo que nos da una forma covariante de definir a la densidad de energía, μ

   (b) Si me voy a un sistema de referencia en el que me muevo con el fluido, (este sistema se le llama el marco comovil), el tensor de energía esfuerzos del fluido perfecto $\partial_t\,\vec{v} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\,\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}\,p}{\mu\,c^2} + \vec{\nabla}\,\phi =$, con ϕ el potencial gravitatorio.toma la forma

   $${T^\mu}_\nu = \begin{pmatrix} -\mu\,c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

   Demuéstralo.

   (c) Finalmente, muestra que la divergencia del tensor de energía esfuerzos igual a cero, ${T^{\nu\,\mu}}_{;\,\mu} = 0$, junto con la ecuación de continuidad, ${j^\mu}_{;\,\mu} = 0$ implica la ecuación de Euler para fluidos (en el límite o relativista), $\partial_t\,\vec{v} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\,\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}\,p}{\mu\,c^2} + \vec{\nabla}\,\phi =$, con ϕ el potencial gravitatorio. Muestra que también implica la forma de la primera ley de la termodinámica para procesos adiabáticos: $d\,U + p\,dV = 0$

5. El tensor de energía esfuerzos para el campo escalar es

$$T_{\mu\nu} = \phi_\mu \, \phi_\nu + \frac{1}{2} \, g_{\mu\nu} \left(\phi_\alpha \, \phi^\alpha + V(\phi) \right),$$

donde ϕ_μ denota $\partial_\mu \, \phi$ y $V(\phi)$ es el potencial escalar. Muestra que su divergencia igual a cero, implica a la ecuación de Klein Gordon:

$$\Box \, \phi - \frac{d \, V}{d \, \phi} = 0.$$

Capítulo 5

Física en el espacio tiempo

En relatividad especial, veíamos e introducíamos conceptos que nos permitían dejar a las ecuaciones de la Física, vimos en particular a las del electromagnetismo, invariantes bajo transforamciones de Lorentz.

Nos preguntamos sobre la elección de coordenadas para estudiar a un problema dado y veíamos que tampoco deberían las ecuaciones de la Física de depender del sistema de coordenadas que uno elija para estudiar un fenómeno dado y considerabamos la idea de que pudiera ser que no fuesen las coordenadas las que sean curvilíneas, sino que el espacio mismo donde estuviésemos estudiando fuese curvo.

Vimos entonces que nos convenía tner una herramienta matemática que nos permitiera conocer con claridad cómo pasar de un sistema de coordenadas a otro, o de un sistema inercial a otro, por lo que introdujimos y estudiamos a los tensores.

Regresando a nuestro planteamiento de que la Física sea descrita de un modo genérico, es decir, de que queremos expresar a las leyes que conocemos en forma covariante, que sean válidas manteniendo su caracter independiente tanto del estado de movimiento del observador como de las coordenas utilizadas. Es un principio de Relatividad General.

Pero a nivel práctico, queremos escribir las leyes de la Física en el cuadriespacio, para el caso plano y una vez descritas aqui, como dichas leyes deben ser válidas en todos los sistemas de referencia y todos ellos son equivalentes, tendremos que si se vale en un sistema de referencia, debe ser válida en todos.

Pero si ya reescribimos a la ley bajo estudio de un modo covariante en el espacio tiempo plano, sólo nos resta generalizar dicha ley a cualquier otro espacio-tiempo, plano o no, con coordenadas cartesiana o no. Y la receta es sencilla: en la ecuación ya generalizada al caso de espacio-tiempo plano, substituyo como por punto y coma, es decir, traduzco la derivada usual a derivada covariante, si aparece el tensor de Minkowski, $\eta_{\mu\,\nu}$, se cambia por un tenosr métrico general.

Veamos varios ejemplos de objetos y leyes de la Física que describiremos en forma covariante.

5.1 Cuadrivecctor de flujo

Recordemos la ecuación para la cuadrivelocidad, $-c^2 = g_{\mu\,\nu}\,u^\mu\,u^\nu$ reescrita en el espacio plano es

$$\begin{aligned} -c^2 = \eta_{\mu\,\nu}\,u^\mu\,u^\nu &= -\left(\frac{d\,c\,t}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2, \\ &= -c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right), \\ &= -c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(1 - \left(\left(\frac{v_x}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{c}\right)^2\right)\right), \\ &= -c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right), \end{aligned} \tag{5.1}$$

por lo que, en el límite no relativista, cuando las velocidades son mucho menores a la velocidad de la luz, de la ecuación anterior tenemos que, el tiempo coordenado tiende a coincidir con el tiempo propio.

Veamos una ecuación muy importante en Física, **la ecuación de continuidad**

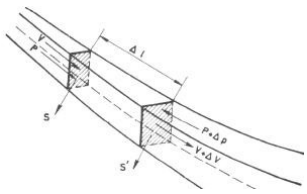


Figura 5.1: diagrama de continuidad de un flujo.

$$\partial_t\,\rho_0 + \vec{\nabla}\cdot(\rho_0\,\vec{v}) = 0, \tag{5.2}$$

que describe el cambio en la densidad, ρ_0, contenida en un volumen dado, moviéndose a velocidad $\vec{v}$. La ecuación se deriva considerando de dos maneras el flujo que sale de un volumen V_0: por un lado, dicho flujo se puede escribir como $\oint \rho_0\,\vec{v}\cdot d\vec{f}$, con $d\vec{f}$ el vector perpendicular al elemento de área y, por otro lado, dicho flujo es $\partial_t \int \rho_0\,dV$. Igualando ambas expresiones y usando el teorema de Gauss, llegamos a la ecuación de continuidad.

Ahora, la idea es reescribir ésta ecuación en el espacio tiempo. Para ello notamos dos cosas: primero que tenemos al llamado **vector de flujo** o **vector de corriente**, $\vec{j} = \rho_0\,\vec{v}$ y, segunda, que podemos reescribir a la ecuación de continuidad, en coordenadas cartesiana, como $(\rho_0)_{,t} + (\rho_0\,v^i)_{,i} = 0$. Ambas ideas nos sugieren definir a un **cuadrivector de flujo**,

$$j^\mu = \rho_0\,u^\mu, \tag{5.3}$$

y reescribir a la ecuación de continuidad como

$$j^\mu{}_{,\,\mu} = 0. \tag{5.4}$$

Revisando, al desarrollar la ecuación anterior obtengo $j^\mu{}_{,\mu} = j^0{}_{,t} + j^i{}_{,i} = \rho_0\,u^0{}_{,t} + \rho_0\,u^i{}_{,i} = \rho_0\,u^0{}_{,t} + \rho_0\,u^0\,v^i{}_{,i} = 0$, donde desarrollamos la convención de suma de Einstein y usamos la definición del cuadrivector de flujo y la regla de la cadena. Ahora, si nos vamos al límite newtoniano, que es de donde salió originalmente la ecuación, acabamos de mostrar que ahí $dt \equiv d\tau$, por lo que $u^0 \equiv 1$, por lo que vemos que, en efecto, nuestra ecuación se reduce a la ecuación conocida en el límite, por lo tanto, la consideramos una generalización válida de la ecuación de continuidad al cuadriespacio.

Muy bien, pero, el o la lector@ atent@ notará que esta no es una ecuación covariante *buona fide*. Sabemos que la derivada normal no respecta el que los objetos queden geométricamente bien definidos. Cierto, pero la derivada covariante, ¡sí lo hace! Por lo que proponemos a la ecuación covariante de continuidad, o, simplemente, a la ecuación de continuidad como

$$j^{\mu}{}_{;\,\mu} = 0. \tag{5.5}$$

Esta sí. Es una ecuación covariante, válida en un sistema de referencia (el plano), por lo tanto, válida en todos los sistemas de referencia. ¿Qué tal?

5.1.1 Geodésicas de nuevo

Otra ecaución muy importante es la de las geodésicas que ya vimos, ec.(**??**). Pero no se ve muy covariante con los símbolos de Christoffel ahí explícitos que, además, ya vimos que son la conección afín y no están geométricamente bien definidos. Las podemos reescribir como

$$\frac{d\,u^{\mu}}{d\,\tau} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\,\beta}\,u^{\alpha}\,u^{\beta} = 0. \tag{5.6}$$

Ahora, es útil notal que, para un objeto función de las coordenadas, por regla de la cadena:

$$\frac{d\,A}{d\,\tau} = \frac{\partial A}{\partial\,x^{\lambda}}\,\frac{d\,x^{\lambda}}{d\,\tau} = A^{\mu}{}_{,\,\lambda}\,u^{\lambda}, \tag{5.7}$$

por lo que podemos reescribir al primer término de la ecuación de geodésicas como

$$\left(u^{\mu}{}_{,\,\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\,\lambda}\,u^{\alpha}\right)\,u^{\lambda} = 0, \tag{5.8}$$

donde factorizamos a la cuadrivelocidad, aprovechando que su índice es mudo en los dos sumandos. Pero el término entre paréntesis ¡no es sino la derivada covariante de u^{μ}!. Por ello, podemos escribir a la ecuación de las geodésicas como

$$u^{\mu}{}_{;\nu}\,u^{\nu} = 0, \tag{5.9}$$

que ya quedan claramente covariantes y muy elegantes.

Antes de dejar a las geoésicas, es interesante ver su límite newtoniano. Considerando el término con los Christoffels, desarrollamos el término con las velocidades:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\,\beta}\,\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\,\frac{dx^{\beta}}{d\tau} &= \Gamma^{\mu}{}_{00}\,\left(\frac{d\,c\,t}{d\tau}\right)^{2} + 2\,\Gamma^{\mu}{}_{0i}\,\frac{d\,c\,t}{d\tau}\,\frac{dx^{i}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}{}_{ij}\,\frac{dx^{i}}{d\tau}\,\frac{dx^{j}}{d\tau}, \\
&= \left(\Gamma^{\mu}{}_{00} + 2\,\Gamma^{\mu}{}_{0i}\,\frac{dx^{i}}{d\,c\,t} + \Gamma^{\mu}{}_{ij}\,\frac{dx^{i}}{d\,c\,t}\,\frac{dx^{j}}{d\,c\,t}\right)\,c^{2}\,\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{2}, \\
&= \left(\Gamma^{\mu}{}_{00} + 2\,\Gamma^{\mu}{}_{0i}\,\frac{v^{i}}{c} + \Gamma^{\mu}{}_{ij}\,\frac{v^{i}}{c}\,\frac{v^{j}}{c}\right)\,c^{2}\,\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{2},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

como antes. En el límite newtoniano, $v << c$ en cualquiera de sus componentes y $dt \equiv d\tau$. Por lo que este término de la ecuación geodésica se reduce a $c^{2}\,\Gamma^{\mu}{}_{00}$, ya que como veremos, también el término $\Gamma^{\mu}{}_{00}$ es el dominante en los Christoffels.

En efecto, para acercarnos al caso newtoniano, de coordenadas cartesianas, podemos considerar que la métrica es sólo una pequeña desviación de la plana, y que esta desviación no depende del tiempo (como en general se comportan los potenciales gravitatorios newtonianos). De la definición del Christoffel, ec.(**??**), tenemos que $\Gamma^{\mu}{}_{00} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\,\sigma}\,\left(2\,g_{\sigma 0,ct} - g_{00\,,\sigma}\right) \equiv \epsilon\,\eta^{\mu\,\sigma}\,\phi_{,\,\sigma}$; donde usamos que es estática, que

$g_{\mu\,\nu} = \eta_{\mu\,\nu} + \epsilon\, h_{\mu\,\nu}$, con $\epsilon << 1$, lo que implica que $g^{\mu\,\nu} = \eta^{\mu\,\nu} - \epsilon\, h_{\mu\,\nu}$, así como denotamos a $h_{00} = -2\,\phi$, con ϕ una función adimensional. Los demás coeficientes de Christoffel son más pequeños.

Respecto al primer término de la ecución de geodésicas, desarrollamos la suma de Einstein: $u^{\mu}{}_{,\,\lambda}\, u^{\lambda} = u^{\mu}{}_{,\,c\,t}\, u^0 + u^{\mu}{}_{,\,i}\, u^0\, \frac{v^i}{c}$, por lo que la ecuación geodésica en el límite newtoniano se reduce a

$$u^0 \left(u^{\mu}{}_{,\,c\,t} + u^{\mu}{}_{,\,i}\, \frac{v^i}{c} \right) + \epsilon\, \eta^{\mu\,\sigma}\, (c^2\, \phi)_{,\,\sigma} = 0,$$

por lo que, la componente $\mu = 0$, recordando que consideramos un campo estático, implica a primer orden, que $u^0{}_{,\,c\,t} = 0$. Como ya teníamos que a este orden, $u^0 = c$, la ecuación nos dice que se queda con el valor constante, la de la luz; el tiempo coordenado sigue siendo muy cercano al tiempo propio. La componente espacial, $\mu = j$, considerando $u^0 = c$ y de nuevo usando que $u^j = u^0\, \frac{v^j}{c}$, implica:

$$\partial_t\, \vec{v} + \vec{v} \cdot\, \vec{\nabla}\, \vec{v} + \vec{\nabla}(\epsilon\, c^2\, \phi) = 0, \tag{5.11}$$

al identificar a ϕ con el potencial gravitatorio, adimensional, obtenemos ¡la ecuación de Euler de los fluidos! En el caso sin presión y en presencia de un potencial gravitatorio.

Muy interesante. De este modo, vemos que el límite newtoniano de las ecuaciones de geodésicas no son una especie de segunda ley en el cuadriespacio, donde se hablabla de una "fuerza geométrica", sino que su límite nos lleva a las ecuaciones de Euler de los fluidos. Las partículas al moverse libremente en el espacio curvo, generalizan al movimiento de los fluidos.

5.1.2 Electromagnetismo en 4d

De este modo, vamos viendo la manera de reescribir a las leyes de la Física del lenguaje newtoniano a la descripción primero en el cuadriespacio y después de una modo completamentamente covariante, así como la manera de regresar una ecuación covariante, al caso newtoniano.

Veamos ahora a las ecuaciones del electromagnetismo,

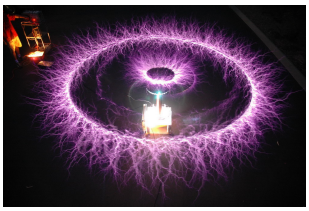


Figura 5.2: Descarga producida por bobinas Tesla.

las ecuaciones Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \tfrac{\rho_Q}{\epsilon_0}, \qquad \epsilon_0\, \partial_t\, \vec{E} - \tfrac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\,\pi\, \vec{j_Q}, \tag{5.12}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \tfrac{1}{\mu_0} \partial_t\, \vec{B} + \epsilon_0\, \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{5.13}$$

donde $\vec{E}, \vec{B}$ son los campos eléctrico y magnético, ρ_Q es la densidad de carga y $\vec{j_Q}$ la corriente y ϵ_0, μ_0 son la permetitividad eléctrica en el vacío y la permeabilidad magnética en el vacío (o constante magnética),respectivamente y satisfacen $\epsilon_0, \mu_0 = 1/c^2$.

Es interesante notar que las ecuaciones de la electrodinámica forman un sistema contreñido, con restricciones, es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales consiste de seis ecuaciones de evolución y dos ecuaciones que no evolucionan, es decir, que se deben satisfacer a todo tiempo y a éstas se les llama constricciones. Esto es algo común con la interacción gravitatoria. Nótese también la asimetriía de las

ecuaciones, no hay una carga monopolar magnética, ni su correspondiente corriente. Esto es algo que a algunos investigadores les ha parecido iconsistente y dedican su vida a la búsqueda del mono-polo magnético. En la opinión de los autores, no es justificada dicha búsqueda, ¡así están bien las ecuaciones de Maxwell!

Queremos entonces escribir a las ecuaciones de Maxwell de un modo covariante, independiente del sistema de coordenadas con las que se describan o del estado de movimiento de quien las observe. Entonces, las ecuaciones de Maxwell deben ser descritas en el espacio-tiempo. Ya vimos que para definir objetos ahí, hemos unido conceptos como tiempo y espacio, energía y momento, carga y corriente. Es de suponer entonces que queremos unir en un sólo objeto a los campos eléctrico y magnético.

Son entonces seis entradas, por lo que no caben en un tensor, si me voy al siguiente objeto, es un tensor de dos índices, pero en general éste tiene 16 entradas independientes (en 4d), por lo que se pasa. Sin embargo, si consideramos que dicho tensor sea simétrico, tendremos diez entradas independientes y, si consideramos que sea antisimétrico, me quedan seis, suena bien.

Consideremos entonces, para que sea el objeto que une en un sólo concepto a los campos campos eléctrico y magnético, un tensor con dos índices antisimétrico, $F^{\mu\,\nu} = -F^{\nu\,\mu}$. Queremos reproducir, reescribir las ecuaciones de Maxwell. Muy bien, fijémonos en las primeras cuatro , ecs. (**??**), una que es constricción y otra es una vectorial. En ambas aparecen los campos derivados y están igualadas a carga y corriente. Con lo que ya hemos visto, vemos que para el lado derecho definiremos al cuadrivector de corriente o flujo de carga, $j^{\mu}{}_{Q} = (\rho_Q, \vec{j}_Q)$. Del lado izquierdo, tenemos derivadas de los campos, es decir, deber entrar derivadas del tensor F y, como queremos cuatro ecuaciones, suena natural probar con la divergencia, es decir, consideremos

$$F^{\mu\,\nu}{}_{,\,\nu} = j^{\mu}. \tag{5.14}$$

Al hacer $\mu = 0$, obtengo $F^{0\,\nu}{}_{,\nu} = j^0$, es decir, $F^{0\,i}{}_{,i} = \rho_Q$, donde usamos que $F^{00} = 0$, por antisimetría, comparando con las ecuaciones que queremos reproducir, vemos que, haciendo $F^{0\,i} = \epsilon_0\, E^i$, recuperamos la de Coulomb. ¡Vamos bien!

Hagamos entonces $\mu = j$, del lado derecho obtenemos la componente j de la corriente y del izquierdo $F^{j\,0}{}_{,t} + F^{j\,l}{}_{,l}$, recordando que $F^{j\,l}{}_{,l} = 0$ cuando $j = l$. $F^{j\,0}$ ya lo identificamos como la componente j del campo eléctrico, obteniendo $\epsilon_0\, E^j_{,t}$, muy bien e identificamos a $F^{j\,l}{}_{,l}$ como a la componente j del rotacional de un vector, por lo que, tomando a dicho vector como $\vec{B}/mu_0$, obtenemos que haciendo $\mu = j$ en ec. (**??**), obtenemos la componente j del la ecuación vectorial de ec. (**??**). ¡Perfecto! Ya tenemos entonces que, en efecto, ec. (**??**) es la manera de escribir a cuatro de las ecuaciones de Maxwell en el cuadriespacio.

Para terminar, usando el principio de equivalencia, vemos que las ecuaciones son correctas en el espacio plano y con coordenadas cartesianas y están escritas de un modo válido en plano, su generalización a cualquier espacio curvo o con coordenadas curvilineas es, siguiendo la receta, $, \to ;:$

$$F^{\mu\,\nu}{}_{;\,\nu} = j^{\mu}. \tag{5.15}$$

son las primeras cuatro ecuaciones de Maxwell perfectamente covariantes. El tensor F tiene entonces la forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_0\, E^1 & \epsilon_0\, E^2 & \epsilon_0\, E^3 \\ -\epsilon_0\, E^1 & 0 & -B_3 & -B_2 \\ -\epsilon_0\, E^2 & B_3 & 0 & B_1 \\ -\epsilon_0\, E^3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

y se le conoce como **tensor de Faraday** (¡de ahí la F!).

Las otras cuatro ecuaciones de Maxwell, ecs.(**??**), no son tan intuitivas, pero se puede mostrar que las ecuaciones

$$F_{\mu\,\nu\,;\lambda} + F_{\lambda\,\mu\,;\nu} + F_{\nu\,\lambda\,;\mu} = 0, \tag{5.17}$$

en efecto, reproducen a las otras cuatro ecuaciones, cuando me reduzco al caso plano, considerando coma, en vez de punto y coma. Queda de tarea comprobarlo, teniendo cuidado de bajar los índices, es fácil ver que el tensor con índices abajo, covariante, es también antisimétrico. Nótese que son muchas ecuaciones, ¡64! y nosotros sólo queremos cuatro, por lo que muchas son idénticamente cero y otras son equivalentes, demuéstralo.

De este modo, vemos que las ecuaciones de Maxwell son escritas por ecs.(**??**, **??**) de un modo completamente covariante, por lo que su forma no cambia bajo transformaciones de sistemas de referencia, no sólo para transformaciones de Lorentz, sino para cualquier transformación entre sistemas inerciales y descritas en cualquier sistema de coordenadas.

Por ello, nos esperamos hasta ahora para probar que la teoría electromagnética es una teoría covariante, por ello no lo mostramos en la sección de relatividad especial, a pesar de que fue una de las motiviciones de Lorentz, encontrar unas transformaciones que dejaran invariantes a las ecuaciones de Maxwell, pues ahora vemos que no es por las transformaciones sino por la manera de escribir a las ecuaciones como vemos y probamos su covariancia.

Vemos así, cómo se va haciendo la conexión con la Física conocida y se describe en este nuevo contexto de espacio tiempo de manera covariante en dicho espacio-tiempo.

Otro punto interesante, es la existencia o uso de los potenciales electromagnéticos. De cursos anteriores, sabemos que es posible expresar a los campos eléctrico y magnético en términos de dos potenciales, uno vectorial, $\vec{A}$ y uno escalar, ϕ de la siguiente manera:

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} + \vec{\nabla}\,\phi, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{5.18}$$

Nuevamente, queremos unir estos potenciales, que son cuatro componentes, en un sólo concepto. Ya con la experiencia que tenemos, es de esperar que el objeto sea

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \tag{5.19}$$

el que sea un cuadrivector bien definido, lo tomamos como definición, es decir, consideramos que, en efecto, bajo una transformación de coordenadas, se transforma como dicta la regla, imponiendo condiciones al potencial escalar y vectorial.

Y, de las ecuaciones ecs.(**??**) y la definición del tensor de Faraday en términos de los campos eléctrico y magnético, nos permite inferir que este tensor de Faraday se relaciona con el cuadripotencial de la siguiente manera:

$$F_{\mu\,\nu} = 2\,A_{[\mu\,;\nu]}, \tag{5.20}$$

los paréntesis cuadrados me indican antisimetrización, $A_{[\mu\,;\nu]} = \frac{1}{2}\,(A_{\mu\,;\nu} - A_{\nu\,;\mu})$. Es fácil ver que la derivada covariante antisimetrizada se reduce a la derivada usual, se anulan los Christoffels, por lo que podemos escribir $F_{\mu\nu} = A_{[\mu\,,\nu]}$,, pero se ve feyucho. Es importante notar que al cuadripotencial le podemos sumar el gradiente de una función escalar arbitraria y, dado que las derivadas normales conmutan, la definición del tensor de Faraday, que es, a fin de cuentas, lo que tiene Física, no cambia. Esta propiedad se conoce como libertad de norma del potencial electromagnético:

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + f(x^\lambda)_{,\,\mu} \Rightarrow F_{\mu\,\nu} = 2\,A_{[\mu\,;\nu]} = 2\,\tilde{A}_{[\mu\,;\nu]}, \tag{5.21}$$

por lo que siempre es posible elegir una componente del potencial electromagnético arbitrariamente, o dar una relación arbitraria entre dichas componentes.

Así, podemos reescribir a las ecuaciones de Maxwell ahora en términos del cuadripotencial, queda de tarea hacerlo y pensar una norma que le da un sentido muy interesante a las ecuaciones así escritas, ¡inténtalo lector!

Las ecuaciones de Maxwell nos permiten ver varias propiedades de las ecuaciones escritas de modo covariante. Para empezar, veamos una relación muy útil. Desde el álgebra matricial se conoce la siguiente relación general. Dada una matriz A con determinante $\mathbf{A}$, dicha relación es:

$$d\,\mathbf{A} = \mathrm{Tr}\,\left(\tilde{A}\,d\,A\right), \tag{5.22}$$

con $\tilde{A}$ la matriz adjunta de A. Pero en nuestro caso, $\tilde{A} = \mathbf{A}\,A^{-1}$, con A^{-1} la mariz inversa. Entonces

$$d\,(\ln \mathbf{A}) = \mathrm{Tr}\,\left(A^{-1}\,d\,A\right), \tag{5.23}$$

Con lo que, para el caso del tensor métrico, tenemos la siguiente relación:

$$\frac{-g_{,\lambda}}{-g} = g^{\mu\nu}\,g_{\mu\nu\,,\lambda}, \tag{5.24}$$

con g el determinante del tensor métrico y le puse el menos pues ya sabemos que son espacios lorentzianos. Esta es una relación muy útil que nos permite simplicar varias de las ecuaciones que se obtienen.

Por ejemplo, tenemos que para los símbolos de Christoffel se puede ver que la contracción de sus índices implica

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,g_{\mu\nu\,,\lambda}, \tag{5.25}$$

por lo que, usando la relación recién derivada, tenemos que podemos expresar a los Christoffels contraidos como:

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{\sqrt{-g}_{,\lambda}}{\sqrt{-g}}. \tag{5.26}$$

Esta es una relación no sólo bonita sino muy útil, veamos que le pasa a la divergencia covariante de un vector A^{μ}, es decir a $A^{\mu}_{;\mu}$, que vemos que es una divergencia, derivarlo cada índice por su correspondiente coordenada:

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{;\mu} &= A^{\mu}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\,A^{\lambda}, && (5.27)\\ &= A^{\lambda}_{,\lambda} + \frac{\sqrt{-g}_{,\lambda}}{\sqrt{-g}}\,A^{\lambda}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\left(\sqrt{-g}\,A^{\lambda}_{,\lambda} + \sqrt{-g}_{,\lambda}\,A^{\lambda}\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\left(\sqrt{-g}\,A^{\lambda}\right)_{,\lambda}. && (5.28) \end{aligned}$$

Se va la derivada covariante y me queda la derivada usual. Esto ayuda mucho a simplificar los cálculos y a estudiar a las ecuaciones. También se tiene que, para un tensor antisimétrico, $F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$, su divergencia satisface la relación:

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right)_{,\nu}. \tag{5.29}$$

Y, para un escalar, ϕ, su D'Alambertiano, $\Box\,\phi = \nabla^{\alpha}\,\nabla_{\alpha}\,\phi$, satisface

$$\Box\,\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\phi_{,\mu}\right)_{,\nu}. \tag{5.30}$$

¡Que cosa! Ya que la aprendemos a usar, ¡la queremos quitar!.

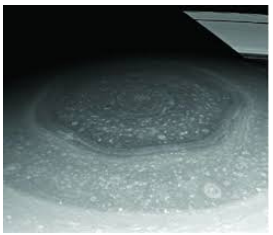


Figura 5.3: Comportamientos de los fluidos.

5.1.3 Hidrodinámica 4d

Otro tipo de materia, materia-energía, que es importante poder describir en forma covariante son los fluidos.

Son sistemas muy interesantes que describen muchos de los fenómenos con los que estamos en contacto y que nos interesarán en la relatividad general.

Dada la definición de fluido, como la da Laudau, por ejemplo [**?**], como un sistema macroscópico, un medio denso, lo que implica que cualquier elemento de volumen del fluido, por más pequeño que se considere, es suficientemente grande para contener una gran cantidad de moléculas.

Una *partícula de fluido*, en el sentido dado arriba, es la que sigue una trayectoria determinada por una velocidad $\vec{v}$ y tiene densidad ρ_0, lo que nos permite definir al vector de flujo y su generalización al cuadriespacio, ec.(**??**) y su correspondiente ecuación de conservación, ec.(**??**):

$$j^\mu = \rho_0\, u^\mu, \qquad\qquad j^\mu{}_{;\,\mu} = 0. \tag{5.31}$$

También ya vimos que la ecuación de las geodésicas, es la manera covariante de escribir a las ecauciónes de Euler en el caso sin presión. Entonces, como queremos un objeto que, al sacarle la divergencia (como ya vimos en el caso de electromagnetismo y el tensor de Faraday), me de las de Euler, podemos definir al siguiente objeto, geométricamente bien definido:

$$T^{\mu\,\nu} = \rho_0\, u^\mu\, u^\nu, \tag{5.32}$$

al sacarle la divergencia e igualarla a cero, usando las propiedades de regla de Leibnitz para la derivada covariante:

$$T^{\mu\,\nu}{}_{;\,\nu} = u^\mu\ (\rho_0\, u^\nu)_{;\,\nu} + \rho_0\, u^\mu{}_{;\,\nu}\, u^\nu = 0,$$

pero el primer sumando se anula independientemente por la conservación del flujo, por lo que la divergencia del tensor igualada a cero nos da un término proporcional a la ecuación de las geodésicas, que ya vimos que son la generalización de las ecuaciones de Euler en el cuadriespacio. De este modo, nos convencemos de que el tensor dado por la ec. (**??**), junto con la ecuación de continuidad, describen a un fluido sin presión. Este tipo de fluido con presión cero se les conoce en relatividad general como **polvo**.

Agregar un término que, en el límite newtoniano que de el término de presión en las ecuaciones de Euler, $\vec{\nabla}\, p/\rho_0$, es directo, basta con añadirle al de polvo un término con presión, p sin embargo hay que sumarlo también en el témino de la densidad porque en el espacio tiempo de Minkowski un observador que se mueve con las parículas no siente ninguna presión. Dado que la derivada covariante no ve al tensor métrico, tenemos:

$$T^{\mu\,\nu} = (\rho_0\, c^2 + p)\, u^\mu\, u^\nu + p\, g^{\mu\,\nu}, \tag{5.33}$$

sabemos qeu al tomar la divergencia aparecerá un término $p_{,\,\nu}\, g^{\mu\,\nu}$ que, al considerar una presión que sea independinte del tiempo, nos llevará en el límite newtoniano (también se debe considerar que el término

de la presión es muy pequeño comparado con la densidad) a tener sumado al término de las geodésicas, un término con $\vec{\nabla}\, p$. Finalmente, al dividir entre el a densidad, ρ_0, recuperamos las ecuaciones de Euler con todo y término de presión.

Sin embargo, para tener un fluido general que incluya procesos internos se modifica el primer coeficiente del tensor dado por ec. (**??**) obteniendo:

$$T^{\mu\,\nu} = \rho_0\, c^2\, h\, \frac{u^\mu\, u^\nu}{c^2} + p\, g^{\mu\nu}, \tag{5.34}$$

con ρ_0 la densidad de energía en reposo, h la entalpía por unidad de energía, definida como $h = 1+\epsilon+\frac{p}{c^2\,\rho_0}$, con ϵ la energía interna y p la presión, dejámos explícitos los términos con la velocidad de la luz para enfatizar a las unidades. Este es el tensor de energía esfuerzos del fluido perfecto.

Veamos nuevamente las ecuaciones que obtenemos al igualar su divergencia a cero. Entonces, de ec. (**??**), $T^{\mu\,\nu}{}_{;\,\nu} = 0$ implica (recuerden que ρ_0, ϵ y p son escalares, su derivdada covariante se reduce a la usual).

$$\rho_0\, c^2\, h\, \frac{u^\mu{}_{;\,\nu}\, u^\nu}{c^2} + \left((1+\epsilon)\; c\; (\rho_0\, u^\nu)_{;\,\nu} + p\, \frac{u^\nu{}_{;\,\nu}}{c} + \left(\rho_0\, c^2\, \epsilon_{,\,\nu} + p_{,\,\nu}\right)\, \frac{u^\nu}{c} \right)\, \frac{u^\mu}{c} + p_{,\,\nu}\, g^{\mu\nu} = 0. \tag{5.35}$$

Usando la ecuación de continuidad, dos veces, tanto $j^\nu{}_{;\,\nu} = 0$, como $u^\nu{}_{;\,\nu} = -\frac{\rho_{0\,,\,\nu}\, u^\nu}{\rho_0}$, obtenemos:

$$\rho_0\, c^2\, h\, \frac{u^\mu{}_{;\,\nu}\, u^\nu}{c^2} + \left(\rho_0\, c^2\, \epsilon_{,\,\nu} - p\, \frac{\rho_{0\,,\,\nu}}{\rho_0} + p_{,\,\nu} \right)\, \frac{u^\nu}{c}\, \frac{u^\mu}{c} + p_{,\,\nu}\, g^{\mu\nu} = 0. \tag{5.36}$$

Ahora, contraemos con u_μ y obtenemos:

$$\left(\rho_0\, c^2\, \epsilon_{,\,\nu} - p\, \frac{\rho_{0\,,\,\nu}}{\rho_0} \right)\, u^\nu = 0, \tag{5.37}$$

donde pasaron varias cosas. Primero, $u_\mu\, u^\mu{}_{;\,\nu} = 0$, demuéstralo, es buen ejercicio. Esto nos quitó el primer término. Al contraer tenemos que $u_\mu\, u^\mu = -c^2$ (¿no es sugestivo para la pregunta anterior?) y con $g^{\mu\nu}$ le sube el índice, por lo que se cancelan los términos de derivada de presión. Y así, llegamos a ec. (**??**).

Usando esta ecuación de regreso en ec. (**??**), tenemos que la podemos reescribir como

$$\frac{u^\mu{}_{;\,\nu}\, u^\nu}{c^2} + \frac{p_{,\,\nu}}{\rho_0\, c^2\, h}\, \left(g^{\mu\nu} + \frac{u^\mu\, u^\nu}{c^2} \right) = 0. \tag{5.38}$$

que es, finalmente, la ecuación generalizada de Euler para fluidos perfectos con presión y energía interna, totalmente covariante. En efecto, notemos inicialmente que no son cuatro ecuaciones, ya sólo son tres independientes, pues, al contraer con u_μ queda idénticamente igual a cero. Segundo, el término $\rho_0\, c^2\, h = \rho_0\, c^2\; (1+\epsilon) + p = \mu\, c^2 + p$, donde hemos definido a

$$\mu = \rho_0\; (1+\epsilon)\,, \tag{5.39}$$

como la densidad total de energía. en la física newtoniana, la cotidiana, el término de presión es muchísimo menor que el término de densidad por la velocidad de la luz al cuadrado. Esta es una de las razones de mantener unidades, poder tener intuición de los órdenes de magnitud de las cantidades físicas. Aún si consideramos presiones que nos parecerían enormes, como la presión en los abismos marinos, a doce kilómetros de profundidad, ese término sigue siendo mucho menor que la densidad por la velocidad de la luz al cuadrado. Este término de presión será significativo sólo en condiciones de altas, altísimas presiones, como en una estrella de neutrones; en los casos usuales, se puede despreciar. Así mismo, el término $\frac{u^\mu\, u^\nu}{c^2}$

en general se puede despreciar frente al término de la métrica; el que podría pintar es la componente 00, pero, como en el caso newtoniano consideramos que la presión no depende del tiempo, este término es cero, por lo que la ecuación (**??**), en el límite newtoniano se reduce a $u^{\mu}{}_{;\,\nu}\, u^{\nu} + \frac{p_{,\,\nu}}{\mu}\, g^{\mu\,\nu} = 0$, que ya sabemos que nos llevará a las ecuciones de Euler usuales, con μ representando a la densidad newtoniana, pero sabemos que incluye la densidad en reposo, ρ_0 y una densidad de energía interna, $\epsilon\,\rho_0$.

Por último, como $T^{\mu\,\nu}{}_{;\,\nu} = 0$, son cuatro ecuaciones, y ya vimos que incluye la generalización covariante de las tres de Euler (tres, pues es una ecuación vectorial), ¿Qué pasa con la cuarta? Para ver esto, regresamos a la ecuación que tambien obtuvimos de pedir que se anulara la divergencia, la ecuación (**??**). Ya vimos que $a_{,\,\nu}\, u^{\nu} = \frac{d\,a}{d\,\tau}$, cuando a es una función de las coordenadas, entonces podemos reescribir dicha ecuación como

$$m\,c^2\,\frac{d\,\epsilon}{d\,\tau} + p\,\frac{d\,\left(\frac{m}{\rho_0}\right)}{d\,\tau} = 0,$$

donde reacomodamos un poco y multiplicamos por una masa característica del sistema, la masa de cada partícula de fluido, por ejemplo. Pero $d\,\left(\frac{m}{\rho_0}\right) = d\,V$, con V un volumen característico del sistema. Como τ es un parámetro, puedo entonces escribir esta ecuación como

$$d\,U + p\,d\,V = 0, \tag{5.40}$$

donde definimos a $U = m\,c^2\,\epsilon$. Pero esta es la energía interna del sistema, por lo que podemos ver que recuperamos la primera ley de la termodinámica para procesos adiabáticos, $d\,Q = 0$.

De este modo, vemos que la divergencia igual a cero del tensor de energía esfuerzos del fluido perfecto contiene a la generalización covariante de las ecuaciones de Euler, así como a la de la primera ley de la termo, implicando que los procesos descritos por estos fluidos, son adiabáticos.

5.1.4 Campo escalar

Finalmente, queremos mencionar a otro tensor de energía esfuerzos que describe a otro tipo de materia: **el campo escalar**. Este es un campo interesante y los autores de las presentes notas lo han trabajado en diversas investigaciones, estudiando la posibilidad de que la materia obscura, algo que mencionaremos en el capítulo de cosmología, sea descrita por dicho campo escalar.

Por ahora, basta con que presentemos al tensor de energía esfuerzos para el campo escalar:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\,\pi\,G}\left(\phi_\mu\,\phi_\nu + \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,(\phi_\alpha\,\phi^\alpha + V(\phi))\right), \tag{5.41}$$

donde ϕ_μ denota $\partial_\mu\,\phi$ y $V(\phi)$ es el potencial escalar. Queda de tarea mostrar que su divergencia igual a cero, implica a la ecuación de Klein Gordon:

$$\Box\,\phi - \frac{d\,V}{d\,\phi} = 0. \tag{5.42}$$

Esta es la ecuación que rige la dinámica del campo escalar. Es una dinámica muy rica y, hasta donde hemos investigado, el campo escalar (complejo) sigue siendo un candidato viable para describir a la materia obscura. El campo escalar también se usa para describir otras posibles etapas de la evolución de nuesro Universo, así como para describir estados condensados de las partículas, al identificarlo con la función de onda.

Capítulo 6

Principio de equivalencia

Ya armados con el álgebra tensorial, tenemos entonces que podemos reescribir a las leyes de la Física de un modo perfectamente covariante, es decir independiente del observador en particular y de las coordenadas que se usen y, además, sabemos cómo pasar de un sistema de referencia dado a cualquier otro.

Esto inclusive ya es más de lo necesario, pues la Física está definida entre sistemas de referencia inerciales; nosotros tenemos leyes de transformación entre cualesquiera sistemas, y en sí nos interesan las transformaciones entre sistemas de referencia inerciales, eso sí, independientemente de las coordenadas que se estén usando. Estas transformaciones son un poco más generales que las de Lorentz, pues incluyen translaciones y, de hecho, forman un grupo, el llamado *grupo de Poincaré*, Así que vemos que las leyes de la Física no dependen del sistema de referencia. Por otro lado, tenemos este resultado que los cuerpos, al estar libres de fuerzas que actúen sobre ellos, siguen rectas que, cuando el espacio es curvo, dichas "rectas" son geodésicas, es decir, ya no siguen el quinto postulado de Euclídes, pero siguen siendo las trayectorias

Figura 6.1: Euclídes, 325 - 265 antes de Cristo y fragmento de papiro de *Los elementos*.

que minimizan la distancia, en un espacio dado caracterizado por el tensor métrico, $g_{\mu\ni}$. Entonces, cuando vemos una trayectoria no-recta y consideramos que hay una fuerza que actúa sobre ella, por primera ley de Newton, ¿podríamos pensar que no es que haya fuerza, sino que sí es recta pero en espacio curvo? Es decir, cuando vemos las trayectorias de los cuerpos en el sistema solar, digamos a las elipses, la idea de Newton es que siguen esa trayectoria debido a la acción de la Fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobrel los planetas, pero, ¿pudiera ser que siguen esa trayectoria, no por la acción de una fuerza, sino que dicha trayectoria es la recta en un espacio-curvo? De este modo, dada la trayectoria, podríamos

determinar cuál es la curvatuar del espacio tiempo que tiene como geodésicas a dichas trayectorias... Muy

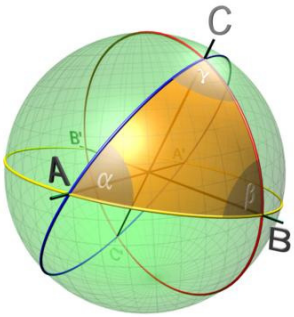


Figura 6.2: Triángulo formado por geodésicas en la esfera

interesante. Estos razonamientos nos llevan a entender la postulación del **principio de equivalencia**: *Un campo gravitacional se puede describir como un sistema en espacio curvo*, nos llevan a una propuesta básicamente genial. No sabemos si así se le ocurrió a Albert Einstein, pues, como mencionamos, no era dado a citas ni agradecimientos, pero es una posibilidad que lo haya pensado así.

Otra manera de postular esta equivalencia entre gravitación y curvatura se tiene lléndonos hasta la época de Galileo. él nota que los cuerpos caen al mismo tiempo, independiente de su masa, es decir, que la fuerza gravitacional actúa del mismo modo sobre todos los cuerpos. Ya con Newton, se propone que la masa que aparece en su segunda ley, que se le llama masa inercial, es la misma que la masa que aparece en su su ley de gravitación universal, la masa gravitacional y se han hecho muchos experimentos donde se demuestra que, efectivamente, estas masas coinciden.

Einstein, al pensar sobre esto, se da cuenta de que si uno está en un sistema bajo un campo gravitacional, digamos constante para simplificar la idea o uno está en un sistema acelerado, en este caso el equivalente sería con aceleración uniforme entonces, como la aceleración actúa sobre los cuerpos independientemente de su masa inercial y la fuerza de gravedad también actúa sobre los cuerpos independientemente de su masa gravitacional y, como ambas son equivalentes. El considera que son la misma. Por otro lado, si estoy en un sistema cerrado en caida libre, todos los cuerpos, yo incluido, flotaríamos. Todos respondemos igual a esa aceleración, por lo que ¡no podríamos detectarla! Es como si estuviésemos en un sistema inercial.

Con ello, llegamos nuevamente al principio de equivalencia. En efecto, Einstein propone el **Principio de equivalencia de la Gravitación y la inercia**, que es: *En cada punto del espacio tiempo en un campo gravitacional arbitrario, es posible elegir un sistema coordenado localmente inercial tal que, dentro de una región suficientemente pequeña alrededor de dicho punto, las leyes de la Naturaleza toman la misma forma que en un sistema de coordenadas cartesianas no acelerado en ausencia de gravedad.*

De este modo, uniéndo a estas dos ideas, primero que un sistema no acelerado, es un sistema sin campo gravitacional y lo puedo describir como el espacio tiempo de Minkowski, un sistema acelerado, donde actúa un campo gravitacional, lo describo como un sistema en el espacio-tiempo donde el elemento de línea queda descrito por el tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Y, el principio de equivalencia lo veo como en cualquier punto de un espacio tiempo curvo, puedo dar una región en la cual la métrica se reduce a la de Minkowski.

Notemos que, al derivar al límite newtoniano de la ecuación de geodésicas y obtener las ecuaciones de Euler, ec. (**??**), obtuvimos que identificábamos

$$g_{00} = -\left(1 + 2\,\frac{\phi}{c^2}\right), \tag{6.1}$$

con ϕ el potencial newtioniano. Es decir, ya estábamos obteniendo que la geometría, dada por el tensor

métrico, se relaciona con la fuerza gravitatoria, en específico con el potencial gravitatorio. Vemos que ya se dibuja esta relación entre espacio curvo, descrito por la métrica y el potencial gravitacional.

Esta relación nos permite ver el Principio de equivalencia de la Gravitación y la inercia como lo habíamos postulado también: El no tener campo gravitacional lo interpreto como espacio plano, Minkowski y un espacio curvo lo asociaré con una métrica. Así, el principio de equivalencia lo interpretamos que en una región suficientemente cercana a cualquier punto del espacio tiempo la métrica la puedo ver como plana. Tengo así la analogía con el axioma de superficies de Gauss, que cualquier punto de una superficie curva en una cierta vecindad, se puede asociar a una región en al plano tangente a la superficie en ese punto, *i. e.* las superficies curvas son localmente planas.

Es importante notar quedan varios detalles que el la lector@ atent@ puede notar. Está bien, ya se tiene esta analogía entre curvatura y campos gravitacionales. Sin embargo, dado un espacio-tiempo, digamos plano, ¡es plano independientemente de las coordenadas que yo utilice para describirlo! Es claro que hay que refinar esta idea de que coordenadas curvilíneas representan un espacio curvo. Necesitamos una manera invariante de caracterizar la curvatura y esa estará dada por un tensor, que es el de Riemann.

Ejercicios 6

1. **Derivada covariante**

   Demuestra explícitamente la igualdad:

   $$u^{\alpha}{}_{;\beta\,\gamma} - u^{\alpha}{}_{;\gamma\,\beta} = u^{\sigma}\, R^{\alpha}{}_{\sigma\,\beta\,\gamma}, \tag{6.2}$$

   donde u^{α} es un cuadrivector.

2. **Bianchi**
   Usando las propiedades de simetría y antisimetr'ia del tensor de Riemann descritas en clase, comprueba las identidades de Bianchi:

   $$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa\,;\eta} + R_{\lambda\,\mu\,\eta\,\nu\,;\kappa} + R_{\lambda\,\mu\,\kappa\,\eta\,;\nu} = 0, \tag{6.3}$$

   Ayuda: Hazlo en un sistema de coordenadas localmente inercial.

3. **Espacio tiempo plano $\Leftrightarrow$ Riemann=0**
   Discute este teorema y sus aplicaciones, así como esboza una demostración de él, en ambas direcciones.

4. **Riemann**
   Partiendo de la expresión para el tensor de Riemann derivada en clase:

   $$R^{\alpha}{}_{\nu\,\lambda\,\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\,\rho\,,\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\,\lambda\,,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda}, \tag{6.4}$$

   demuestra que en su forma covariante se puede escribir como

   $$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\,\nu\,,\kappa\,\lambda} - g_{\lambda\,\nu\,,\kappa\,\mu} + g_{\lambda\,\kappa\,,\nu\,\mu} - g_{\mu\,\kappa\,,\nu\,\lambda}\right) - g_{\eta\,\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\nu\,\lambda}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\kappa\,\lambda}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\nu}\right), \tag{6.5}$$

5. **Ricci y el escalar de curvatura**

   Escribe en términos de los Christoffel y la métrica en la forma más simplificada posible, las expresiones para el tensor de Ricci y para el escalar de curvatura.

6. **Espacio tiempo esféricamente simétrico y estático** A partir de la forma del elemento de línea para el espacio tiempo esféricamente simétrico y estático,

   $$ds^2 = -S(r)\,dt^2 + C(r)\,dt\,dr + T(r)\,dr^2 + D(r)\,r^2\,d\Omega^2, \tag{6.6}$$

   demuestra que, redefiniendo a la coordenada radial y temporal, se puede llevar a la forma

   $$ds^2 = -A(r)\,dt^2 + B(r)\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2, \tag{6.7}$$

7. **Geodésicas en Schwarzschild** Muestra que las expresiones obtenidas en clase para $\dot{x}^{\mu}$ en términos de las cantidades conservadas, efectivamente satisfacen las ecuaciones geodésicas. Hay que calcular (o buscar) los Christoffels, ni modo.

Capítulo 7

Curvatura, Riemann

Ya tenemos una manera de expresar a las leyes de la Física en un contexto de espacio-tiempo, de coordenadas curvilíneas, de modo que queden descritas independientemente de las coordenadas utilizadas y sabemos cómo se transforman bajo cambios de coordenadas o de sistemas de referencia, para lo que utilizamos la formulación tensorial y así, las leyes de la Física, al quedar como ecuaciones tensoriales, quedan invariantes bajo transformaciones de coordenadas o de sistemas de referencia.

También ya vimos la equivalencia entre coordenadas curvilíneas en el espacio tiempo y un campo gravitacional.

Por otro lado, como ya mencionamos, el estudiante atento y despierto, no asustado por la formulación, nota que las características y propiedades de un espacio-tiempo, no pueden depender de las coordenadas que yo use para describirlo. Si es plano, será plano independientemente de que yo use, para describirlo, un sistema de coordenadas cartesiano o un sistema con coordenadas curvilíneas. Por lo que sí hay una relación entre las coordenadas y aceleración o curvatura, pero hay que profundizar más en esta relación.

Hay que ver con detalle esta idea de la curvatura de un espacio-tiempo. Podemos guiarnos con la ecuación de la fuerza gravitacional, la ley gravitacional de Newton

$$\vec{F} = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\hat{r}, \tag{7.1}$$

que nos conviene usar el hecho de que, para fuerzas conservativas, ellas pueden ser derivadas a partir de un potencial, $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, por lo que tengo

$$\vec{\nabla}\phi = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\hat{r}. \tag{7.2}$$

Por otro lado, por el teorema de Gauss se tiene que $\int_S \vec{F}\,\cdot\,\hat{n}\,d\,S\,=\,4\,\pi\,G\,M_V$, con lo que, podemos reescribir $\int_S \vec{\nabla}\,\phi\,\cdot\,\hat{n}\,d\,S = -4\,\pi\,G\,\int_V\,\rho\,d\,V$, donde hemos usando la definición de la masa, M_V como la integral de la densidad, ρ, sobre el volumen. Entonces, usando el teorema de la divergencia obtenemos $\int_V\,\nabla^2\,\phi\,d\,V\,=\,4\,\pi\,G\,\int_V\,\rho\,d\,V$, donde, el operador $\nabla^2\,=\,\vec{\nabla}\,\cdot\,\vec{\nabla}$, se conoce como el **Laplaciano**. Como esta identidad es válida para un volumen arbitrario, llegamos entonces a la siguiente manera de reescribir a la ley de Gravitación Universal, que se conoce como la **ecuación de Poisson**:

$$\nabla^2\,\phi = 4\,\pi\,G\,\rho. \tag{7.3}$$

Por otro lado, ya vimos que el potencial gravitacional, ϕ, lo puedo asociar con los coeficientes métricos, $g_{\mu\nu}$. En sí, vimos que se relaciona con g_{00} a primer orden y consideramos que esta relación se da para todos los coeficientes. Por lo que, como mencionamos, guiándonos con la ecuación de Poisson, para

Figura 7.1: Simeón Denise Poisson, 1781 - 1840.

verla en el espacio tiempo, debemos construir un tensor que tenga que ver con segundas derivadas de los coeficientes métricos.

Ya hemos mostrado que las primeras derivadas de los coeficientes métricos se relacionan con, los símbolos de Christoffel, que no definen a un tensor. Partamos desde aquí. De la transformación de la conexión afín, ec. (**??**), (escrita para las coordenadas no-primadas):

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}}\,\Gamma^{\beta'}_{\gamma'\,\delta'} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}}. \tag{7.4}$$

de donde despejamos $\frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}}$ y vamos a usar el mismo truco que usamos para demostrar la invariancia del intervalo, es decir, derivar y jugar con los índices. Considerando el término con segundas derivadas:

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}} = \Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}}\,\Gamma^{\beta'}_{\gamma'\,\delta'}, \tag{7.5}$$

despejando, recuerda lector@ que lo hacemos utilizando al índice libre, μ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\mu}}\left(\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}}\,\Gamma^{\beta'}_{\gamma'\,\delta'}\right), \\
\frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\mu}}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda} - \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'},
\end{aligned} \tag{7.6}$$

y volviendo a derivar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x^{\sigma'}}{\partial x^{\rho}\,\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^{\rho}\,\partial x^{\mu}}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda} + \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\mu}}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda\,,\rho} - \left(\frac{\partial^2 x^{\gamma'}}{\partial x^{\rho}\,\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial^2 x^{\delta'}}{\partial x^{\rho}\,\partial x^{\nu}}\right)\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'} - \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\rho}}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'\,,\tau'}, \\
\frac{\partial^3 x^{\sigma'}}{\partial x^{\rho}\,\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}} &= \left(\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\alpha}}\,\Gamma^{\alpha}_{\rho\,\mu} - \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\rho}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\mu}}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'}\right)\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda} + \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\mu}}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda\,,\rho} - \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\rho}}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'\,,\tau'} + \\
&\quad - \left(\left(\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\mu}}\,\Gamma^{\mu}_{\rho\,\lambda} - \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\epsilon'}}{\partial x^{\rho}}\,\Gamma^{\gamma'}_{\tau'\,\epsilon'}\right)\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\mu}}\,\Gamma^{\mu}_{\rho\,\nu} - \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\rho}}\,\frac{\partial x^{\epsilon'}}{\partial x^{\nu}}\,\Gamma^{\delta'}_{\tau'\,\epsilon'}\right)\right)\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'}, \\
&= \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\alpha}}\left(\Gamma^{\alpha}_{\nu\,\lambda\,,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda}\right) - \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\rho}}\left(\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'\,,\tau'} + \Gamma^{\epsilon'}_{\tau'\,\gamma'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\epsilon'\,,\delta'} + \Gamma^{\epsilon'}_{\tau'\,\delta'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\epsilon'}\right) + \\
&\quad - \left(\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\rho}}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda} + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\nu}}\,\Gamma^{\mu}_{\rho\,\lambda} + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\rho}\right)\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\mu}}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Claramente se ven feyuchos los términos que tienen productos de gammas y gammas primadas, pero si obtengo la misma expresión con los índices ρ y λ intercambiados (en los términos con gamma prima renombro γ' y τ', que son mudos):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x^{\sigma'}}{\partial x^\lambda\,\partial x^\nu\,\partial x^\rho} &= \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{\nu\,\rho\,,\lambda}+\Gamma^\alpha_{\lambda\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\rho}\right)-\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^\rho}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda}\left(\Gamma^{\sigma'}_{\tau'\,\delta'\,,\gamma'}+\Gamma^{\epsilon'}_{\tau'\,\gamma'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\epsilon'\,,\delta'}+\Gamma^{\epsilon'}_{\gamma'\,\delta'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\tau'\,\epsilon'}\right)+\\ &-\left(\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\rho}+\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\nu}\,\Gamma^\mu_{\rho\,\lambda}+\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\rho}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\lambda}\right)\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\mu}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'},\end{aligned}\tag{7.8}$$

al restar ambas expresiones, el lado izquierdo se cancela pues las derivadas conmutan, del lado derecho se van los términos con gamma y gamma prima y obtengo:

$$\begin{aligned}0 = \quad & \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{\nu\,\rho\,,\lambda}-\Gamma^\alpha_{\nu\,\lambda\,,\rho}+\Gamma^\alpha_{\lambda\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\rho}-\Gamma^\alpha_{\rho\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\lambda}\right)\\ &+\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^\rho}\left(\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'\,,\tau'}+\Gamma^{\epsilon'}_{\tau'\,\gamma'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\epsilon'\,,\delta'}+\Gamma^{\epsilon'}_{\tau'\,\delta'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\epsilon'}-\Gamma^{\sigma'}_{\tau'\,\delta'\,,\gamma'}-\Gamma^{\epsilon'}_{\tau'\,\gamma'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\epsilon'\,,\delta'}-\Gamma^{\epsilon'}_{\gamma'\,\delta'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\tau'\,\epsilon'}\right)\end{aligned}\tag{7.9}$$

es decir:

$$0=\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{\nu\,\rho\,,\lambda}-\Gamma^\alpha_{\nu\,\lambda\,,\rho}+\Gamma^\alpha_{\lambda\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\rho}-\Gamma^\alpha_{\rho\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\lambda}\right)-\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda}\,\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^\rho}\left(\Gamma^{\sigma'}_{\tau'\,\delta'\,,\gamma'}-\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\delta'\,,\tau'}-+\Gamma^{\epsilon'}_{\gamma'\,\delta'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\tau'\,\epsilon'}-\Gamma^{\epsilon'}_{\tau'\,\delta'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\gamma'\,\epsilon'}\right),\tag{7.10}$$

¡es el mismo objeto en coordenadas primadas y no primadas!, ¡Un tensor! Paso al lado derecho y despejo:

$$\Gamma^{\sigma'}_{\eta'\,\omega'\,,\xi'}-\Gamma^{\sigma'}_{\xi'\,\omega'\,,\eta'}+\Gamma^{\epsilon'}_{\xi'\,\omega'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\eta'\,\epsilon'}-\Gamma^{\epsilon'}_{\eta'\,\omega'}\,\Gamma^{\sigma'}_{\xi'\,\epsilon'}=\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\xi'}}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\omega'}}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\eta'}}\left(\Gamma^\alpha_{\nu\,\rho\,,\lambda}-\Gamma^\alpha_{\nu\,\lambda\,,\rho}+\Gamma^\alpha_{\lambda\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\rho}-\Gamma^\alpha_{\rho\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\lambda}\right)\tag{7.11}$$

es decir

$$R^{\sigma'}{}_{\xi'\,\omega'\,\eta'}=\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\xi'}}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\omega'}}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\eta'}}\,R^\alpha{}_{\nu\,\lambda\,\rho},\tag{7.12}$$

donde

$$R^\alpha{}_{\nu\,\lambda\,\rho}=\Gamma^\alpha_{\nu\,\rho\,,\lambda}-\Gamma^\alpha_{\nu\,\lambda\,,\rho}+\Gamma^\alpha_{\lambda\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\rho}-\Gamma^\alpha_{\rho\,\mu}\,\Gamma^\mu_{\nu\,\lambda},\tag{7.13}$$

es una cantidad tensorial, de hecho, La cantidad tensorial, se le conoce como el tensor de Riemann, pues lo dedujo Riemann en sus trabajos sobre hipersuperficies.

Figura 7.2: Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 - 1866.

Es justo como lo queremos, bueno, tal vez un poco más complicado de lo que se podía esperar, pero es una cantidad tensorial formada con derivadas de las conexiones afines que, al verlas como símbolos de Christoffel, son segundas derivadas del tensor métrico. Regresando a la ecuación de Piosson y a la

analogía entre coeficientes métricos y potenciales gravitacionales, podemos sospechar que este tensor de Riemann es el que va a intervenir en la generalización de la ecuación de Poisson al caso de espacio-tiempo curvo.

Mencionamos que la definición del tensor de Riemann, ec. (**??**), claramente tiene una libertad de signo. Es posible definirlo como menos esta definición y sigue siendo un tensor con las mismas propiedades. Un cambio de signo global no lo afecta, es por convención que se elige uno u otro (como la signatura de la métrica, aunque en este caso no hay una argumentación para preferir una u otra signatura), sin embargo, se tiene que ser consistente con la definición elegida. A final de cuentas, lo que queremos es que las convenciones sean consistentes y se reduzcan a las leyes de la Física conocidas en el límite newtoniano, donde no hay libertad de elegir al signo, es decir, la ecuación de Poisson está fija, no es que se pueda elegir que el laplaciano del potencial sea igual a menos la densidad. Entonces tomamos esta definición de Riemann y mencionamos que en el Weinberg [**?**], éste la toma como menos la nuestra.

Por ahora veremos que de hecho, este tensor es único, es el único que se puede construir con segundas derivadas de los coeficientes métricos y veremos algunas de sus propiedades.

Para empezar, una caracteristica bonita del tensor de Riemann es que es lineal en las segundas derivadas de la métrica, es decir, cuando considero al tensor de Riemann con todos los índices covariantes, $R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} = g_{\lambda\,\alpha}\, R^{\alpha}{}_{\mu\,\nu\,\kappa}$, utilizando que $g_{\lambda\,\sigma}\, g^{\sigma\,\rho}{}_{,\kappa} = -g^{\sigma\,\rho}\, g_{\lambda\,\sigma\,,\kappa} = -g^{\sigma\,\rho}\, (g_{\eta\sigma}\, \Gamma^{\eta}_{\kappa\,\lambda} - g_{\eta\lambda}\, \Gamma^{\eta}_{\kappa\,\sigma})$, que ya quedó de tarea demostrar estas propiedades, se llega a

$$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} = \frac{1}{2}\,(g_{\mu\,\nu\,,\kappa\,\lambda} - g_{\lambda\,\nu\,,\kappa\,\mu} + g_{\lambda\,\kappa\,,\nu\,\mu} - g_{\mu\,\kappa\,,\nu\,\lambda}) + g_{\eta\,\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\kappa\,\lambda}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\nu} - \Gamma^{\eta}_{\nu\,\lambda}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\kappa}\right), \tag{7.14}$$

también queda de tarea demostrarlo. Esta forma de escribir al tensor de Riemann muestra claramente su linealidad respecto a las segundas derivadas de la métrica y es útil en algunos análisis.

Hay otros dos tensores que son muy útiles y que puedo construir a partir del de Riemann contrayendo los índices, uno es el **tensor de Ricci**:

$$R_{\nu\,\rho} = R^{\alpha}_{\nu\,\alpha\,\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\,\rho\,,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\,\alpha\,,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\alpha}, \tag{7.15}$$

que aún se puede simplificar, lo dejamos de tarea. Otro es, ya encarrerados, pues subirle el índice al

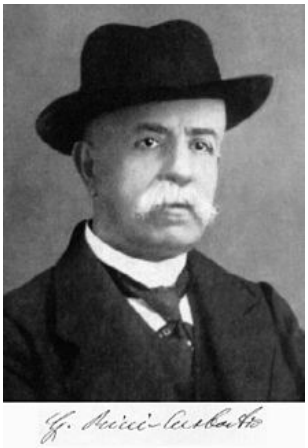


Figura 7.3: Gregorio Ricci-Curbastro, 1853 - 1925.

Ricci y contraerlo, lo que me da un escalar, **el escalar de curvatura**:

$$R = g^{\mu\,\nu}\, R_{\mu\,\nu} = R^{\mu}_{\mu}. \tag{7.16}$$

Ellos juegan un papel muy importante en la física, como veremos más adelante. Por ahora vemos más propiedades interesantes del tensor de Riemann y de sus contracciones. Notamos de paso que en la definición del tensor de Ricci, también hay una libertad de signo, se puede definir contrayendo el primer ínidice, contravariante, con el tercero, como lo hemos hecho en estas notas, o con el cuarto, siendo de nuevo, una diferencia de un signo. Mantenemos la presentada, primero con tercero.

El tensor de Riemann si nos habla directamente de la curvatura, aquí sí, independientemente de las coordenadas. Hay un teorema muy bonito que nos dice que *El tensor de Riemann es cero, si y sólo si la metrica es plana*, i. e., $R^{\alpha}_{\mu\,\alpha\,\nu} = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\,\nu} = \eta_{\mu\,\nu}$. La demostración de regreso es trivial, pues si la métrica es plana, se que existe una transforamción $x \to x'$ tal que la lleva a la de Minkowski, $\eta_{\mu'\,\nu'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}\,g_{\alpha\,\beta}$ y, para Minkowski, los Christoffels son cero, así como sus derivadas, por lo que Riemann es cero en ese sistema y, como es una igualdad tensorial, es cero en todos los sistemas de referencia. Para la ida, lo discutiremos más adelante.

Veamos de una vez las simetrías del tensor de Riemann y así podemos determinar cúantas componentes independientes tiene y cúantas son cero. De entrada se pensaría que tengo N^4 componentes, con N la dimensión del espacio que se está considerando, para $N = 4$, ¡son 256!, pero veamos con cuidado. Considero la forma del tensor de Riemann con los índices abajo y es fácil ver directamente las siguientes simetrías:

1. **Simetría**
   Intercambio de la primer pareja de índices con la segunda

$$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} = R_{\nu\,\kappa\,\lambda\,\mu} \tag{7.17}$$

2. **Antisimetría**
   Intercambio de índices consecutivos

$$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} = -R_{\mu\,\lambda\,\nu\,\kappa} = -R_{\lambda\,\mu\,\kappa\,\nu} = R_{\mu\,\lambda\,\nu\,\kappa}, \tag{7.18}$$

3. **Ciclicidad**
   Esta no es tan directa de ver, pero es fácil de comprobar, dejo fijo el primero y les doy vuelta a los tres siguientes:

$$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} + R_{\lambda\,\kappa\,\mu\,\nu} + R_{\lambda\,\nu\,\kappa\,\mu} = 0 \tag{7.19}$$

De aquíya nos queda claro que no puedo formar otras contracciones que Ricci, que fue contraer el primero con el tercero, pues contraer el primero con el segundo es cero y contraer con el cuarto, sólo cambia el signo. De hecho hay autores que definen al Ricci con la contración de primero y cuarto, lo que me cambia el signo de la definición. Esto es convención, como el definir la signatura del elemento de línea como $(-,+,+,+)$ o $(+,-,-,-)$, nosotros hemos tomado la primera y para Ricci, lo contraemos con el tercero. Al ver otros textos, hay que ver la convención de signos que usan.

Ahora sí podemos contar cuántas componentes independientes tiene el tensor de Riemman. Recordemos que una matriz de n dimensiones si es simétrica tiene $\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$ entradas independientes y si es antisimétrica, tiene $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ entradas independientes. Si consideramos a Riemann como una matriz $R_{(\alpha\,\beta)\,(\mu\,\nu)}$ con "índices" $(\alpha\,\beta)$ y $(\mu\,\nu)$. De la antisimetría vemos que cada "índice" toma un número de valores independientes igual al número de elementos independientes de una matriz antisimétrica de N dimensiones, es decir, $\frac{1}{2}N\,(N-1)$. Y, como la "matriz" $R_{(\alpha\,\beta)\,(\mu\,\nu)}$ es simétrica, sus dimensiones son $\frac{1}{2}N\,(N-1)$, por lo que tiene $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}N\,(N-1)\right)\left(\frac{1}{2}N\,(N-1)+1\right) = \frac{1}{8}\,N\,(N-1)\,N\,\left(N^2-N+2\right)$.

Falta considerar la ciclicidad. La simetría y la antisimetría de Riemann, hacen que la suma cíclica $P_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} = R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} + R_{\lambda\,\kappa\,\mu\,\nu} + R_{\lambda\,\nu\,\kappa\,\mu}$, sea un tensor completamente antisimétrico, hacer uno explícito, $P_{\mu\,\lambda\,\nu\,\kappa} = -P_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa}$. Estos tensores tienen un número de componentes independientes dadas por $N\,(N-1)\,(N-2)\,(N-3)\,/4$

buscar una desmostración de esto. Por lo que la ciclicidad impone este número de relaciones entre los coeficientes, es decir, este número de constricciones, por lo que finalmente me queda que el número de elementos independientes de Riemann es $\frac{1}{8}\,N\,(N-1)\,N\,\left(N^2-N+2\right)-N\,(N-1)\,(N-2)\,(N-3)\,/4!$, es decir

$$C_N=\frac{1}{12}\,N^2\,\left(N^2-1\right). \tag{7.20}$$

Para $N=1$, es cero, no hay componentes independientes, no hay curvatura, bueno, es cero, como se ve de la antisimetría. Una línea no tiene curvatura, pues Riemann refleja las propiedades internas del espacio, no el como se encuentra embebido dentro de otro espacio de dimensión mayor. Para una superficie, $N=2$, hay una componente, relacionada con la curvatura gaussiana. Para $N=3$, hay seis componentes y para $N=4$, se tienen veinte componentes independientes del tensor de Riemann.

Respecto al Ricci, es directo ver que es un tensor simétrico, $R_{\mu\,\nu}=R_{\nu\,\mu}$, En una dimensión tiene una componente, cero, en dos tiene tres componentes, en tres dimensiones seis, igual que Riemann, por lo que Riemann se puede expresar en términos del Ricci. En cuatro tengo 10 componentes de Ricci, por lo que no son suficientes para determinar al Riemann completo.

Finalmente, otra relación muy importante entre los componentes de Riemann son las **identidades de Bianchi**, una relación cíclica de la derivada covariante de Riemann. La manera más fácil de verla es en un punto y considerar en ese punto un sistema inercial de coordenadas, que me mata a los Christoffels, me deja a Riemann sólo con las segundas derivadas de la métrica y la derivada covariante se reduce a la usual en ese punto, es decir, de la ec. (**??**):

$$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa\,;\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\eta}}\,\left(g_{\mu\,\nu\,,\kappa\,\lambda}-g_{\lambda\,\nu\,,\kappa\,\mu}+g_{\lambda\,\kappa\,,\nu\,\mu}-g_{\mu\,\kappa\,,\nu\,\lambda}\right) \tag{7.21}$$

permuto los tres últimos indices y obtengo

$$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa\,;\eta}+R_{\lambda\,\mu\,\eta\,\nu\,;\kappa}+R_{\lambda\,\mu\,\kappa\,\eta\,;\nu}=0, \tag{7.22}$$

que son las identidades de Bianchi.

Figura 7.4: Luigi Bianchi, 1856 - 1928.

Como es una expresión tensorial, válida en un sistema de referencia, es válida en cualquier sistema. Muy bonito y vemos que este m"etodo es poderoso. Fíjense que, si contraigo en las identidades de Bianchi λ con ν, obtengo: (Primero lo subo usando que la métrica es transparente a la derivada covariante)

$$\begin{aligned}
R^{\lambda}{}_{\mu\,\nu\,\kappa\,;\eta}+R^{\lambda}{}_{\mu\,\eta\,\nu\,;\kappa}+R^{\lambda}{}_{\mu\,\kappa\,\eta\,;\nu}&=0,\\
R^{\lambda}{}_{\mu\,\lambda\,\kappa\,;\eta}+R^{\lambda}{}_{\mu\,\eta\,\lambda\,;\kappa}+R^{\lambda}{}_{\mu\,\kappa\,\eta\,;\lambda}&=0,\\
R_{\mu\,\kappa\,;\eta}-R_{\mu\,\eta\,;\kappa}+R^{\lambda}{}_{\mu\,\kappa\,\eta\,;\lambda}&=0.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

y vuelvo a contraer, pero ojo, $R^{\lambda}{}_{\mu\,\kappa\,\eta\,;\lambda} = g^{\lambda\,\alpha}\,R_{\alpha\,\mu\,\kappa\,\eta\,;\lambda} = -g^{\lambda\,\alpha}\,R_{\mu\,\alpha\,\kappa\,\eta\,;\lambda} = -g^{\lambda\,\alpha}\,g_{\mu\,\beta}\,R^{\beta}{}_{\alpha\,\kappa\,\eta\,;\lambda}$, por lo que obtengo: $R_{\mu\,\kappa\,;\eta} - R_{\mu\,\eta\,;\kappa} - g^{\lambda\,\alpha}\,g_{\mu\,\beta}\,R^{\beta}{}_{\alpha\,\kappa\,\eta\,;\lambda} = 0$ y puedo subir el índice μ:

$$R^{\mu}{}_{\kappa\,;\eta} - R^{\mu}{}_{\eta\,;\kappa} - g^{\lambda\,\alpha}\,R^{\mu}{}_{\alpha\,\kappa\,\eta\,;\lambda} = 0, \tag{7.24}$$

ahora sí, contraigo μ y κ:

$$\begin{aligned}
R_{;\eta} - R^{\mu}{}_{\eta\,;\mu} - g^{\lambda\,\alpha}\,R_{\alpha\,\eta\,;\lambda} &= 0,\\
R_{;\eta} - R^{\mu}{}_{\eta\,;\mu} - R^{\alpha}{}_{\eta\,;\alpha} &= 0,\\
R_{;\eta} - 2\,R^{\mu}{}_{\eta\,;\mu} &= 0,\\
R^{\mu}{}_{\eta\,;\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\eta}\,R_{;\mu} &= 0,\\
\left(R^{\mu}{}_{\eta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\eta}\,R\right)_{;\mu} &= 0
\end{aligned} \tag{7.25}$$

es decir

$$\left(R^{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\,\nu}\,R\right)_{;\nu} = 0. \tag{7.26}$$

Las identidades de Bianchi nos implican que divergencia del tensor

$$G^{\mu\,\nu} = R^{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\,\nu}\,R, \tag{7.27}$$

es siempre cero, para cualquier espacio. Este tensor se conoce como el **tensor de Einstein** y, recalcamos, su divergencia es cero, por argumentos puramente geométricos.

Más propiedades de Riemann. Veamos a la derivada covariante de un vector, V_{μ}, es decir $V_{\mu\,;\nu}$, que ya la sabemos desarrollar y tomamos una segunda derivada covariante: $V_{\mu\,;\nu\,\kappa}$, es decir, considerando que $V_{\mu\,;\nu}$ es un tensor

$$V_{\mu\,;\nu\,\kappa} = V_{\mu\,;\nu\,,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,V_{\lambda\,;\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,V_{\mu\,;\lambda}, \tag{7.28}$$

y desarrollo la derivada covariante:

$$\begin{aligned}
V_{\mu\,;\nu\,\kappa} &= \left(V_{\mu\,,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\nu}\,V_{\lambda}\right)_{,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,\left(V_{\lambda\,,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\,\nu}\,V_{\sigma}\right) - \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,\left(V_{\mu\,,\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\,\lambda}\,V_{\sigma}\right),\\
&= V_{\mu\,,\nu\,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\nu}\,V_{\lambda\,,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,V_{\lambda\,,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,V_{\mu\,,\lambda} - \left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\nu\,,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\lambda}\right)\,V_{\sigma}.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Tomo la expresión intercambiando los índices ν y κ:

$$V_{\mu\,;\kappa\,\nu} = V_{\mu\,,\kappa\,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,V_{\lambda\,,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\nu}\,V_{\lambda\,,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,V_{\mu\,,\lambda} - \left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\kappa\,,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\lambda}\right)\,V_{\sigma}, \tag{7.30}$$

y las resto, para ver qué pasa al conmutar derivadas covariantes:

$$\begin{aligned}
V_{\mu\,;\nu\,\kappa} - V_{\mu\,;\kappa\,\nu} &= V_{\mu\,,\nu\,\kappa} - V_{\mu\,,\kappa\,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\nu}\,V_{\lambda\,,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,V_{\lambda\,,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,V_{\mu\,,\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,V_{\lambda\,,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\nu}\,V_{\lambda\,,\kappa} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,V_{\mu\,,\lambda} +\\
&- \left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\nu\,,\kappa} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\,\kappa\,,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\,\kappa} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\,\kappa}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\lambda}\right)\,V_{\sigma},\\
&= \left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\nu\,,\kappa} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\,\kappa\,,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\kappa}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\,\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\,\kappa}\right)\,V_{\sigma},
\end{aligned} \tag{7.31}$$

es decir

$$V_{\mu\,;\nu\,\kappa} - V_{\mu\,;\kappa\,\nu} = V_{\sigma}\,R^{\sigma}{}_{\mu\,\nu\,\kappa}. \tag{7.32}$$

Muy bonito también. Vemos como Riemann, la curvatura, es la responsable de que no conumten las derivadas covariantes. Sólo lo hacen en espacio plano.

Para terminar esta sección, veamos la unicidad. Para ver la unicidad del tensor de Riemann, en el sentido de que es el único tensor que se puede construir con el tensor métrico y sus primeras y segundas

derivadas y es lineal en las segundas derivadas, usaremos el hecho de que al darse una igualdad tensorial, dicha igualdad es válida para todo sistema de referencia, que es una de las ideas centrales de dar la formulación covariante, pero usamos esta idea al revés, es decir, se demuestra una igualdad tensorial en un sistema de referencia, claramente se escoje uno que sea fácil y, dada la igualdad, válida es dicho sistema, como es una igualdad tensorial, lo será en todos los sistemas.

Así pues, nos fijamos en un punto del espacio tiempo, X y ya sabemos que en dicho punto y en una región cercana a él, puedo elegir un sistema de referencia localmente inercial, donde los coeficientes métricos se reducen a los de Minkowski y los símbolos de Christoffel son cero. Más aún, nos fijamos sólo en las transformaciones de coordenadas que me dejan cero a la conexión afín, es decir, aquellas que satisfacen

$$\frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\nu \, \partial x^\lambda}|_{x=X} = 0. \tag{7.33}$$

Queremos construir un tensor lineal en las segundas derivadas de la métrica. Como pido que se anulen los Christoffels en X, dicho tensor debe ser una combinacionón lineal de derivadas de la conexión afín. De las expresiones que obtuvimos antes para derivar al tensor de Riemann, vemos que, en el caso en que la $\Gamma^\alpha_{\lambda\,\mu}$ y $\Gamma^{\sigma'}_{\tau'\,\epsilon'}$ son cero, obtengo, en $x = X$:

$$\frac{\partial^3 x^{\sigma'}}{\partial x^\lambda \, \partial x^\nu \, \partial x^\rho} = \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha} \, \Gamma^\alpha_{\nu\,\rho\,,\lambda} - \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^\rho} \, \frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\nu} \, \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda} \, \Gamma^{\sigma'}_{\tau'\,\delta'\,,\gamma'}, \tag{7.34}$$

es decir, la tranformación para la derivada de la conexión afín me queda en este caso, en $x = X$:

$$\Gamma^{\sigma'}_{\epsilon'\,\omega'\,,\eta'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\epsilon'}} \, \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\omega'}} \, \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\eta'}} \, \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha} \, \Gamma^\alpha_{\nu\,\rho\,,\lambda} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\epsilon'}} \, \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\omega'}} \, \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\eta'}} \, \frac{\partial^3 x^{\sigma'}}{\partial x^\lambda \, \partial x^\nu \, \partial x^\rho}, \tag{7.35}$$

pero quiero obtener un tensor con estas derivadas de gamma, por lo que, de nuevo, me sobra el último termino. Con la experiencia que tenemos, veo que si conmuto λ y ρ y los resto, este término se cancela, para cualquier transformación que yo de, por lo que, en $x = X$,

$$T^\alpha_{\nu\,\rho\,\lambda} = \Gamma^\alpha_{\nu\,\rho\,,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\,\lambda\,\rho} \tag{7.36}$$

es el tensor que estamos buscando. Pero, cuando $\Gamma = 0$, el tensor de Riemann es igual a este tensor, $R^\alpha_{\nu\,\rho\,\lambda} = T^\alpha_{\nu\,\rho\,\lambda}$. Esta es una igualdad para un punto arbitrario, por lo que se vale para cualquier punto, es válida para un sistema de referencia, pero es una igualdad tensorial, por lo que es válida para cualquier sistema. Por lo que demostramos que Riemann es el único tensor lineal en las segundas derivadas de los coeficientes métricos.

Muy bien, piensa bien lector@ esta demostración pues usa esta idea muy poderosa de igualdades tensoriales.

Queda pendiente la demostración de regreso para el teorema. Si Riemann es cero, el espacio es plano. Podemos usar esta idea de hacerlo en un punto, donde siempre es posible elegir que la métrica sea en ese punto la de Minkowksi y los Chistoffels sean cero, con lo que nos queda Riemann sólo en términos de las segundas derivadas, usando la expresión para Riemann dada por la ec. (**??**),

$$0 = g_{\mu\,\nu\,,\kappa\,\lambda} - g_{\lambda\,\nu\,,\kappa\,\mu} + g_{\lambda\,\kappa\,,\nu\,\mu} - g_{\mu\,\kappa\,,\nu\,\lambda}, \tag{7.37}$$

en X, donde usamos la hipótesis de que Riemann es cero. Combinando los índices podemos mostrar, que $g_{\lambda\,\nu\,,\kappa\,\mu} = 0$, por lo que, si a orden cero es Minkowski, a primer orden también, por elección en un punto y las segundas derivadas también son cero, entonces la métrica es la de Minkowski y el espacio es plano.

Ejercicios 7

Usando las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu} + \Lambda\, g_{\mu\,\nu} = \frac{8\,\pi\, G}{c^4}\, T_{\mu\,\nu}, \tag{7.38}$$

1. **Límite newtoniano**
   Demuestra que el límite newtoniano de estas ecuaciones es la ecuación de Poisson, $\nabla^2\,\phi = 4\,\pi\, G\,\rho$.

2. **Divergencia nula de Einstein** Utilizando las identidades de Bianchi, muestra que el tensor de Einstein, $G_{\mu\,\nu} = R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu}$, de hecho, aún incluyendo al término con constante cosmológica, tiene divergencia nula: $G^{\mu\,\nu}{}_{;\,\nu} = 0$.

3. **Complejidad escondida**
   Como vimos en clase, las ecuaciones de Einstein, son un sistema de diez ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas y altamente no lineales.

   Considerando una métrica totalmente general, es decir, los diez componentes métricos no nulos y dependientes de las cuatro coordenadas, describe una idea para calcular cuántos términos de coefieiente métricos, tienen cada una de las ecuaciones.

4. **Vacío** Considera a las ecuaciones de Einstein en vacío, es decir, cuando $T_{\mu\,\nu} = 0$. Considerando que la constante cosmológica es cero, $\Lambda = 0$, demuestra que vacío implica que

   - $R_{\mu\,\nu} = 0$,
   - y que $R = 0$

   Esto **NO** implica que el espacio sea plano. Discute esta afirmación.

Capítulo 8

Ecuaciones de Einstein

Ya con estos conocimientos sobre la descripción tensorial de la Física, podemos ver la formulación covariante de la ecuación de gravitación misma, es decir,de la ley de Gravitación Universal de Newton:

$$\vec{F} = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\hat{r}, \tag{8.1}$$

que nos habla de cómo se atraen dos masas y la vemos en su forma de Poisson:

$$\nabla^2\,\phi = 4\,\pi\,G\,\rho. \tag{8.2}$$

Lo haremos de dos formas, una, adivinando más o menos y otra a partir de la acción y principios variacionales.

Adivinanza educada

La primera, pues ya hemos identificado al potencial gravitacional newtoniano, ϕ, con los coeficientes métricos $g_{\mu\,\nu}$. Y vemos que tenemos del lado derecho segundas derivadas del potencial. Por lo que, en una descripción covariante, debo tener un objeto tensorial formado con las segundas derivadas de los coeficientes métricos y vemos que debe ser lineal en ellas, por lo que ya sabemos que solo hay un tensor que tiene dichas propiedades y es Riemann. Por lo que del lado derecho vemos que debe haber algo con este tensor, $R^{\mu}_{\nu\,\lambda\,\tau}$.

Del lado derecho tenemos a la materia, la densidad. Hemos visto que su generalización a un objeto en el espacio tiempo puede ser el cudrivector de corriente, j^{μ} o el tensor de energía esfuerzos, $T_{\mu\,\nu}$. Es decir, del lado derecho debe haber un cuadrivector o un tensor de dos índices. Debo tener un objeto con el mismo caracater del lado izquierdo. Para formarlo a partir de Riemann y donde sólo intervenga la métrica, pues si formase una contracción digamos de Ricci con un cuadrivector de velocidad, $u^{\mu}\,R_{\mu\,\nu}$, estaría introduciendo un término extra en las ecuaciones, la velocidad. Y no puedo formar un tensor con un sólo índice sólo con Riemann y la métrica, por lo que el objeto al que debo generalizar la densidad, debe ser proporcional al $T_{\mu\,\nu}$.

Un objeto formado con Riemann y la métrica, de dos índices pues debe ser aquél que tiene Ricci y/o al escalar de curvatura, R, multiplicado por la métrica. Es decir, debe ser una combinación $A_{\mu\,\nu} = a\,R_{\mu\,\nu} + b\,g_{\mu\,\nu}\,R + c\,g_{\mu\,\nu}$, con a, b, c constantes, no funciones escalares sino constantes.

Una propiedad muy bonita del tensor de energía esfuerzos, es su conservación, $T^{\mu\,\nu}{}_{;\nu} = 0$. La discutimos para el caso de fluido perfecto y consideramos que debe ser una propiedad general para cualquier tensor de materia, el que se conserve, por lo que del lado derecho debo tener que ese tensor formado por

la combinación de Riemann yla métrica, también debe tener divergencia cero, $A^{\mu\,\nu}{}_{;\nu} = 0$ y ya vimos, por las identidades de Bianchi, que el tensor que hace esto es

$$G_{\mu\,\nu} = R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu}\, R, \tag{8.3}$$

por lo que podemos concluir que la forma covariante de la descripción del campo gravitacional debido a la materia es

$$C\,\left(R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu}\, R + c\, g_{\mu\,\nu}\right) = 4\,\pi\, G\, T_{\mu\,\nu}. \tag{8.4}$$

Quedan dos constantes por determinar, C y c. Para fijarlas me voy al límite newtoniano, como le hicimos con las geodésicas. Considero un campo débil y estático, es decir, $g_{\mu\,\nu} \simeq \eta_{\mu\,\nu}$ y en este caso, sabemos que la componente principal del $T_{\mu\,\nu}$ es ${}_{00} \simeq \rho$ y las demás son despreciables. Esto lo vemos para el caso de fluido perfecto, recordando que $u^{\nu} =$, es decir, considero que $C\,\left(R_{i\,j} - \frac{1}{2}\,\eta_{i\,j}\, R + c\,\eta_{i\,j}\right) \simeq 0$. Pero, por otro lado, $R = \eta^{0\,0}\, R_{0\,0} + \eta^{i\,j}\, R_{i\,j}$, es decir, $R \simeq -R_{0\,0} + \frac{1}{2}\, 3\, R - 3\, c$, lo que implica que en este caso

$$R \simeq 2\, R_{0\,0} + 6\, c. \tag{8.5}$$

Considero ahora la componente 00: Tenemos $C\,\left(R_{0\,0} - \frac{1}{2}\,\eta_{0\,0}\, R + c\,\eta_{0\,0}\right) = C\,\left(R_{0\,0} + \frac{1}{2}\, R - c\right) \simeq 2\, C\,\left(R_{0\,0} + c\right)$.

Para obtener la forma de $R_{0\,0}$ tengo que $R_{0\,0} = \eta^{\mu\,\nu}\, R_{0\,\mu\,0\,\nu} = -R_{0\,0\,0\,0} + \delta^{i\,j}\, R_{0\,i\,0\,j}$ y estas las saco de la forma de Riemann que ya hemos visto, ec. (**??**) y que en esta aproximación es

$$R_{\lambda\,\mu\,\nu\,\kappa} = \frac{1}{2}\,\left(g_{\mu\,\nu\,,\kappa\,\lambda} - g_{\lambda\,\nu\,,\kappa\,\mu} + g_{\lambda\,\kappa\,,\nu\,\mu} - g_{\mu\,\kappa\,,\nu\,\lambda}\right), \tag{8.6}$$

como la métrica es estática, $R_{0\,0\,0\,0} = 0$ y, para la otra parte, me queda sólo el término que tiene ambas derivadas espaciales, es decir $R_{0\,i\,0\,j} = -\frac{1}{2}\, g_{0\,0\,,i\,j}$, por lo que $R_{0\,0} = -\frac{1}{2}\,\nabla^2\, g_{0\,0}$, y la componente 00 queda entonces $-C\,\left(\nabla^2\, g_{0\,0} + 2\, c\right)$.

Por otro lado, hemos visto que en este caso, al comparar con la expresión newtoniana obtuvimos que $g_{0\,0} \simeq -\,(1 + 2\,\phi)$, con ϕ el potencial newtoniano, por lo que la ecuación se reduce a $C\,\left(2\,\nabla^2\,\phi + 2\, c\right)$, es decir:

$$C\,\left(2\,\nabla^2\,\phi + 2\, c\right) \simeq 4\,\pi\, G\,\rho, \tag{8.7}$$

comparando con la ecuación de Poisson se concluye que $C = \frac{1}{2}$ y $c = 0$. Las ecuaciones finales son:

$$R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu}\, R = 8\,\pi\, G\, T_{\mu\,\nu}, \tag{8.8}$$

que son las **ecuaciones de Einstein**, presentadas por Albert Einstein en 1915.

Ahora sí, estudiante, ¡ya puedes morir en paz! Este es el clímax del curso. El concepto de espacio-tiempo y la invariancia de las leyes de la Física respecto a sistemas de referencia, el álgebra tensorial estudiada, la manera de reescribir a las leyes de la Física newtoniana de una manera covariante, el movimiento geodésico, en fin, la generalización del concepto de recta a geodésica, nos permiten llegar a una manera covariante de ver a la interacción gravitatoria.

Son muchas cosas las que ellas, las ecuaciones de Einstein, que nos dicen. La más importante es el nuevo paradigma que nos plantean. De un lado, el izquierdo, tenemos curvatura, es decir, geometría, del lado derecho, materia. Las ecuaciones de Einstein nos relacionan materia con geometría, la materia es la que determina la geometría, en palabras de Wheeler *La materia le dice al espacio cómo curvarse y el espacio le dice a la materia cómo moverse*. Esto último via las ecuaciones geodésicas. La materia curva al espacio y el espacio determina la trayectoria de la materia. Muy interesante, el círculo se cierra, ya habíamos visto que los cuerpos siguen las trayectorias determinadas por la curvatura del espacio y es la materia la que curva a dicho espacio. ¡No hay fuerza gravitatoria!

Figura 8.1: John Archivald Wheeler, 1911 - 2008.

En efecto, en este nuevo paradigma el Sol, por ejemplo, curva al espacio-tiempo, por el sólo hecho de estar en él. Los cuerpos entonces siguen queriendo estar en las trayectorias que minimizan su energía, sólo que en este caso, como el espacio es curvo, ya no son rectas, son geodésicas, dichas geodésicas pueden ser ... ¡elipses! por ejemplo. Así, los planetas siguen sus trayectorias alrrededor del Sol no por la acción de una fuerza gravitatoria que, de hecho, no existe, sino porque dichas trayectorias son las geodésicas del espacio curvado por el Sol. Interesante, ¿no crees lector@?

El espacio, unido con el tiempo, el espacio-tiempo dejan de ser un escenario innerme donde ocurren los fenómenos, como lo describe la física newtoniana, sino que responde y es afectado por la presencia de la materia. El escenario depende de los actores.

¡Que cambio de paradigma! El, la lector@ se puede preguntar, si, muy bien, pero ¿Cómo se puede probar? ¿Cómo saber si este paradigma es correcto? ¿Qué es correcto?

Pues correcto, una teoría es correcta si describe consistentemente a la Naturaleza y, mientras mejor la describa, es decir, mientras sus descripciones y predicciones coincidan mejor con lo que se mide en un experimento, con lo que ocurre en la Naturaleza, será una mejor teoría. Así, dadas dos teorías, la manera de medir cuál es mejor que la otra, es considerando un experimento y determinando cuál es la teoría cuya predicción, cuantitativa, el numerito, coincide mejor con el medido. Eso es que una teoría sea Física y que sea correcta. No elucubraciones sin posibilidad de ser aterrizadas.

Las ecuaciones de Einstein, si bien, como hemos mencionado, se pudieron "adivinar", a partir de la ecuación de Poisson y, como ya vimos al considerar el límite newtoniano de la ecuación de geodésicas, encontramos que el coeficiente métrico g_{00} se relacionaba con el potencial gravitatorio, ϕ, ya teníamos que la gravitación, ϕ se relacionaba con la geometría, $g_{\mu\,\nu}$ y, como el potencial se determina con la materia (ecuación de Poisson), tenemos ya que la geometría está relacionada con la materia, la idea medular de Einstein. Pero claro, una vez que conocemos la respuesta, es fácil decirla, pero, aquí sí, es Albert Einstein el que se lleva todo el mérito.

Si bien, cuando presentamos a la teoría de la relatividad especial, discutimos que la teoría "ya estaba en el aire", este concepto de unir a la gravitación con la curvatura y, a su vez, ésta con la materia, es completamente original del ingenio de Albert Einstein. Aquí sí, pensamos, esta idea hubiera tardado muchos años en surgir en otra persona. La originalidad y paternidad de la Relatividad General, corresponden a Albert Einstein.

Hay que mencionar, sin embargo, que sí hubo gente que apoyó y contribuyó al desarrollo de la idea, como Marcel Grossman Marcel Grossman fue un geómetra que constribuyó con Einstein al desarrollo de la Teoría de la Relatividad General y, desafortunadamente, no recibió ningún crédito que sepamos por parte de Einstein. Y hubo más, si bien tuvo esa idea, esa intuición genial, la teoría no se desarrolló por

Figura 8.2: Marcel Grossmann, 1878 - 1936.

el trabajo de un sólo hombre, aunque este sea Albert Einstein. Como decimos, lástima.

Regresando a las ecuaciones de Einstein, otro punto muy interesante es la constante, c en la ec. (**??**) que, al llegar al límite newtoniano, la ecuación de Poisson, igualamos a cero. Pero esto hay que tomarlo con cuidado. El cero es algo que no es fácil de tener, ¡aún en una calificación! Si pensamos en lo que hemos discutido sobre lo correcto de las ecuaciones al compararlas con la Naturaleza, esto siempre se realiza con mediciones y éstas, las mediciones, tienen un límite de precisión, dada por los instrumentos utilizados. Por lo tanto, podemos afirmar que la ecuación de Poisson se ha probado hasta cierta precisión y, con esta base, lo que es correcto afirmar es que dicha constante c es menor a cierto valor dado por la precisión de las mediciones, no cero, por lo que, en sí, las ecuaciones de Einstein se escriben como

$$R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu}\, R + \Lambda\, g_{\mu\,\nu} = 8\,\pi\, G\, T_{\mu\,\nu}, \tag{8.9}$$

donde hemos llamado a la constante c, Λ. Esta constante tiene una historia muy intersante que veremos cuando discutamos la solución cosmológica de Friedmann-Lemaitre. Por ahora, lo dejamos así, mencionando que esta es la forma general de escribir a las ecuaciones de Einstein.

En fin, muchas cosas que comentar y ya se está acabando el curso. Terminamos la sección mencionando una propiedad importante de las ecuaciones de Einstein (y la demostración queda de tarea). Partiendo de que las ecuaciones de Einstein, ec. (**??**) se pueden reescribir como

$$R_{\mu\,\nu} = 8\,\pi\, G\, \left(T_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu}\, T \right), \tag{8.10}$$

con T la traza del tensor de energía momento, es decir, $T = g^{\mu\,\nu}\, T_{\mu\,\nu}$. De aquí vemos claramente que si estoy en vacio, no hay materia, $T_{\mu\,\nu} = 0$, por lo que su traza también, tengo que las ecuaciones se reducen a

$$R_{\mu\,\nu} = 0, \tag{8.11}$$

que implican que el escalar de curvatura es cero,

$$R = 0, \tag{8.12}$$

pero, ¡mucho cuidado! ¡no implican que el espacio es necesariamente plano! Hemos visto que si Riemann es cero, sí es plano, pero no dijimos nada de si el tensor de Ricci o el escalar de curvatura son cero, implique lo mismo y, de hecho, no lo es. Veremos casos interesantes que son de vacío, pero tienen curvatura. Muy curioso y lo iremos discutiendo.

Como mencionamos, ahora mostraremos, siguiendo al Landau, [**?**], una derivación alternativa y muy elegante de las ecuaciones de Einstein. Derivar a las ecuaciones de campo por medio de principios variacionales.

8.1 Acción de Einstein Hilbert

Para derivar a las ecuaciones de Einstein a partir de la acción, que ya conocemos de los cursos de mecánica y vimos en acción, enfatizo esta redundancia, con las ecuaciones de geodésicas. . Esta derivación es debida a David Hilbert, también le andaba dando vuetas a la idea pero, nuevamente, no recibió ningún

Figura 8.3: David Hilbert, 1862 - 1943.

reconocimiento por parte de Einstein. Como veremos, su idea es una manera muy elegante de derivar a las ecuaciones de campo y, de hecho, ahora todas las interacciones son derivables de principios variacionales.

Entonces, para el caso de campos, como el gravitacional, hay que hacer algunas, traducciones, de conceptos de partículas a conceptos de campos. En partículas tenemos que la lagrangiana, $\mathcal{L}$ es función de las coordenadas generalizadas, q^i, las velocidades generalizadas, $\dot{q}^i$, y el tiempo, $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q^i, \dot{q}^i, t\right)$ y variamos y las ecuaciones de Euler nos dan ecuaciones para las aceleraciones, $\ddot{q}^i$, es decir, las fuerzas.

Para campos, queremos que la función lagrangiana, se le llama de hecho funcional lagrangiana, sea un escalar, pues queremos una acción invariante, es decir, escalar. En mecánica el parámetro es eltiempo y en campos lo son las coordenadas, por lo que identificamos $t \to x^\alpha$, las coordenadas generalizadas las identificamos con los campos, $q^i \to \phi$, en el caso del campo gravitacional, $q^i \to g_{\mu\,\nu}$ y las velocidades generalizadas se van a las derivadas de los campos, $\dot{q}^i \to \phi_{,\nu}$, $\dot{q}^i \to g_{\mu\,\nu\,,\lambda}$, por lo que para campos la funcional lagrangian es $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi, \phi_{,\nu}, x^\alpha\right)$, para el caso gravitacional, $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(g_{\mu\,\nu}, g_{\mu\,\nu\,,\lambda}, x^\alpha\right)$, la integración en mecánica es sobre el tiempo, en campos es sobre el cuadrivolumen, $dt \to d^4\,x$, pero debemos considerar al volumen invariante, es decir $dt \to \sqrt{-g}\,d^4\,x$, con g el determinante de la métrica.

Tenemos entonces que la acción en campos es

$$S = \int \mathcal{L}\left(\phi, \phi_{,\nu}, x^\alpha\right)\,\sqrt{-g}\,d^4x \tag{8.13}$$

y la lagrangiana debe ser un escalar. Para el caso del campo gravitacional, el escalar que rápidamente se ocurre es el escalar de curvatura, R. Ya pensándole más, vemos que puede haber problemas, pues el escalar involucra segundas derivadas del campo, de $g_{\mu\,\nu}$, que nos podría dar ecuaciones con las terceras derivadas, que ya no será correcto. Sin embargo, como veremos más adelante, ¡funciona bien!

Veamoslo. Entonces, consideramos la acción,

$$S = \int \sqrt{-g}\,\left(R + \mathcal{L}_{\text{Materia}}\right)\,d^4x, \tag{8.14}$$

que se conoce como la **acción de Einstein-Hilbert**.

La idea es que, al variar y hacerla extremo, encontremos las ecuaciones. Veamos primeramente la parte geom'etrica. Variamos, $\delta\, S_g = \int \delta\,(\sqrt{-g}\, R)\; d^4x = \int \delta\,(\sqrt{-g}\, g^{\mu\,\nu}\, R_{\mu\,\nu})\; d^4x$, que me implica, por Leibnitz, $\delta\, S_g = \int\; (\delta\,\sqrt{-g}\, g^{\mu\,\nu}\, R_{\mu\,\nu} + \sqrt{-g}\,\delta\;(g^{\mu\,\nu})\; R_{\mu\,\nu} + \sqrt{-g}\, g^{\mu\,\nu}\,\delta\;(R_{\mu\,\nu}))\; d^4x$.

Ya hemos mencionado la relación entre las derivadas del determinante y las de los coeficientes métricos, $\frac{g_{,\nu}}{g} = g^{\alpha\,\beta}\, g_{\alpha\,\beta\,,\nu}$. Lo mismo vale para la variación, es decir,

$$\delta\,\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\mu\,\nu}\,\delta\, g_{\mu\,\nu}, \tag{8.15}$$

Para la variación de Ricci, nos vamos de nuevo a un sistema donde en un punto arbitrario la métrica es la de Minkowski y los Christoffel se anulan, por lo que para Ricci obtenemos, como ya se mostró,

$$R_{\nu\,\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha\,\nu\,,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\,\rho\,,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\rho}, \tag{8.16}$$

en el punto estudiado se reduce a:

$$R_{\mu\,\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha\,\mu\,,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\,\nu\,,\alpha}, \tag{8.17}$$

al hacer la variación, que conmuta con las derivadas, obtenemos

$$g^{\mu\,\nu}\,\delta\, R_{\mu\,\nu} = g^{\mu\,\nu}\,\delta\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha\,\mu\,,\nu} - g^{\mu\,\nu}\,\delta\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\,\nu\,,\alpha}. \tag{8.18}$$

Como la métrica se reduce a la plana, es posible incluirla en la derivada y se obtiene que

$$g^{\mu\,\nu}\,\delta\, R_{\mu\,\nu} = \partial_{\alpha}\,\left(g^{\mu\,\alpha}\,\delta\,\Gamma^{\nu}_{\nu\,\mu} - g^{\mu\,\nu}\,\delta\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\,\nu}\right), \tag{8.19}$$

es decir,

$$g^{\mu\,\nu}\,\delta\, R_{\mu\,\nu} = \partial_{\alpha}\,\omega^{\alpha}, \tag{8.20}$$

donde $\omega^{\alpha} = g^{\mu\,\alpha}\,\delta\,\Gamma^{\nu}_{\nu\,\mu} - g^{\mu\,\nu}\,\delta\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\,\nu}$. De este modo, se llega a que $g^{\mu\,\nu}\,\delta\, R_{\mu\,\nu}$ es igual a la divergencia de un vector (se puede demostrar que ω^{α} es efectivamente un vector). Para obtener la expresión en un sistema arbitrario, la regla es, como ya hemos mencionado, **Minkowski se va a $g_{\mu\,\nu}$ y comas a punto y coma**, derivada usual a derivada covariante, por lo que se tiene

$$g^{\mu\,\nu}\,\delta\, R_{\mu\,\nu} = \omega^{\alpha}{}_{;\alpha}, \tag{8.21}$$

que es una expresión tensorial, válida en un sistema de referencia, por lo que es válida en cualquier sistema. Por otro lado, ya sabemos que la divergencia de un vector la puedo escribir como la derivada usual, por lo que

$$g^{\mu\,\nu}\,\delta\, R_{\mu\,\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\left(\sqrt{-g}\,\omega^{\alpha}\right)_{,\alpha}, \tag{8.22}$$

con g el determinante de la métrica. Por lo que todo el término, dentro de la integral queda de la forma

$$\int\,\sqrt{-g}\, g^{\mu\,\nu}\,\delta\, R_{\mu\,\nu} d^4x = \int\,\left(\sqrt{-g}\,\omega^{\alpha}\right)_{,\alpha}\; d^4x, \tag{8.23}$$

que, usando el teorema de Gauss, se puede reescribir como una integral en la frontera que contiene al cuadrivolumen.

$$\int\,\sqrt{-g}\, g^{\mu\,\nu}\,\delta\, R_{\mu\,\nu} d^4x = \int_{\partial V}\,\left(\sqrt{-g}\,\omega_{\alpha}\right)\; dS^{\alpha}, \tag{8.24}$$

pero en dicha frontera, siguiendo la idea variacional de mecánica, las variaciones son nulas, por lo que este término se anula y obtenemos entonces que la variación de la acción es

$$\delta\, S_g = \int\,\sqrt{-g}\,\left(R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu}\, R\right)\,\delta\, g^{\mu\,\nu}\, d^4x, \tag{8.25}$$

Respecto a la materia se toma como definición que el tensor de energía esfuerzos es la variación de la lagrangiana de materia respecto al tensor métrico:

$$k\,T_{\mu\,\nu} = \frac{\delta\,\mathcal{L}_{\text{Materia}}}{\delta\,g^{\mu\,\nu}}. \tag{8.26}$$

Es posible mostrar que esta es una definicón correcta y consistente de los tensores de energía esfuerzos que hemos presentado con anterioridad, siendo el caso más claro el del tensor de enrgía esfuerzos del campo escalar, ec. (**??**), que proviene de variar la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{c.e.}} = g^{\mu\,\nu}\,\nabla_\mu\,\phi\,\nabla_\nu\,\phi + V(\phi). \tag{8.27}$$

En efecto, $\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{c.e.}}}{\delta\,g^{\mu\,\nu}}$ nos genera el corresponiente tensor, ec. (**??**), y la variación respecto al campo escalar, $\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{c.e.}}}{\delta\,\phi}$ nos genera a la ecuación de Klein- Gordon, ec. (**??**).

De este modo, obtenemos finalmente que

$$\delta\,S = \int \sqrt{-g}\,\left(R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\,\nu}\,R - k\,T_{\mu\,\nu}\right)\delta\,g^{\mu\,\nu}\,d^4x. \tag{8.28}$$

Al tomar el extremo, igual a cero la variación y como es una integral igualada a cero y los $\delta\,g^{\mu\,\nu}$ son arbitrarios, concluimos que el integrando debe ser cero, es decir:

$$R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\,\nu}\,R - k\,T_{\mu\,\nu} = 0, \tag{8.29}$$

con lo que finalmente obtenemos, identificando a la constnate k con $k = \frac{8\,\pi\,G}{c^4}$:

$$R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\,\nu}\,R = \frac{8\,\pi\,G}{c^4}\,T_{\mu\,\nu}, \tag{8.30}$$

las ecuaciones de Einstein.

De este modo vemos que las ecuaciones de campo gravitatorio, en efecto, surgen de una lagrangiana y del principio variacional. Claramente, si se desea incluir en la lagrangiana a la constante cosmológica, Λ, basta con redefinirla como

$$S = \int \sqrt{-g}\,\left(R + \Lambda + \mathcal{L}_{\text{Materia}}\right)\,d^4x \tag{8.31}$$

y, al hacer la variación de esta acción e igualarla a cero, obtenemos

$$R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\,\nu}\,R + \Lambda\;g_{\mu\,\nu} = \frac{8\,\pi\,G}{c^4}\,T_{\mu\,\nu}, \tag{8.32}$$

las ecuaciones de Einstein incluyendo a la constante cosmológica.

De este modo, hemos obtenido a las ecuaciones de Einstein de dos maneras, cada una mostrándonos diferentes aspectos de la teoría de la relatividad general; en el primero, como generalización covariante de la fuerza de gravitación de Newton, quitando fuerza por geometría y, en el segundo, a partir de una Lagrangiana, lo que nos permite asomarnos a conceptos aún más profundos de las interacciones de la Naturaleza.

Ejercicios 8

1. **Transformación conforme**
   Encuentra la transformación de cooordenadas que lleva el elemento de línea de un agujero negro en coordenadas de Schwarzschild vistas en clase a:

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \tag{8.33}$$

   a este tipo de transformación de coordenadas se les llama conformalmente planas porque la parte espacial es la métrica plana multiplicada por una función.

Capítulo 9

Soluciones a las ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einsten nos muestran entonces que la geometría del espacio tiempo, descrita por Riemann y sus parientes tensoriales, Ricci y el escalar de curvatura, queda determinada por la distrubución de materia-energía presente en ese espacio. El espacio-tiempo no es inerme a la materia que esté en él, el espacio tiempo se curva al ponerle materia.

Así, la materia le dice al espacio cómo curvarse y, vía las geodésicas, el espacio le dice a la materia, cómo moverse. Es una relación nada lineal, tal vez tiene sentido el pensar que no es una relación aristotélica de identidad, sino más una relación móvil, tipo de las que mencionaba Epicureo al plantear que sólo podríamos cruzar un río una vez, es decir, $a = a$, $a = b$ implica $b = a$, pero sólo en un instante.

La relación entre materia y geometría es más dinámica de lo que la pueden describir matemáticas basadas en lógica aristotélica. Presenta interés el desarrollar una matemática basada en otra lógica, una lógica más dinámica, como la dialéctica y, al formular la Física en esa matemática, podamos entender y tratar mejor éstas relaciones.

Mientras llega ese estudio, las trabajamos así como están.

A pesar de su belleza, las volvemos a poner:

$$R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\,\nu}\, R + \Lambda\, g_{\mu\,\nu} = \frac{8\,\pi\, G}{c^4}\, T_{\mu\,\nu}, \tag{9.1}$$

son de una gran complejidad, no sólo conceptual sino en términos prácticos, tienen una enorme cantidad de términos, si los desarrollásemos, serían cientos, queda de ejercicio el contarlos. En 4d, las ecuaciones de Einstein son 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden, acopladas, altamente no lineales. Son el ejemplo más compeljo de ecuaciones diferenciales que tiene la Física.

Como es de esperarse, el resolver a éstas ecuaciones no es una tarea sencilla. Aunque, es importante aclarar qué queremos decir por resolver a una ecuación diferencial. Resover a las ecuaciones de Einstein, es dar un conjunto de funciones $(g_{\mu\,\nu}, T_{\mu\,\nu})$, que satisfagan a dichas ecuaciones. Pero no sólo esto, sino que deben tener sentido físico. Veamoslas en su límite newtoniano, las ecuaciones de Poisson, resolverlas no sólo es dar una paraje $(\phi,\, \rho)$, pues así nomás, se puede hacer, pero no tiene sentido físico. En efecto, si consideramos una función perfectamente arbitraria, y la llamo "potencial gravitacional", por ejemplo, sea $\phi = \text{senh}\,(k_0\ (z - t\, v_z))\ e^{\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}$, se le aplica el LAplaciano, lo cual es directo y as eso que salga, se le divide entre $4\,\pi\, G$ y se le llama densidad ρ, efectivamente, se tiene una pareja $(\phi,\, \rho)$, que es solución, por construcción, de la ecuación de Poisson, sin embargo, dicha solución no tiene sentido físico. La Física me la da la densidad, doy una distribución de densidad, vacio, una nube de gas esférica, un toro rotante

y busco cuál es el potencial gravitacional generado por esa distribución, dicha paraeja será solución y sí tendrá sentido Físico.

De maner análoga, se puede considerar a una matriz que tenga como entradas funciones arbitrarias, se deriva un par de veces dicha matriz con respecto a las diferentes coordenadas y se construye al correspondiente tensor de Riemann, (nótese que todas son operaciones directas). Una vez que se calcula al tensor de Riemann, se contrae para contruir al correspondiente tensor de Ricci y al escalar de curvatura y finalmente se contruye el tensor de Einstein, ec. (**??**). Este se multiplica por $\frac{c^4}{(8\,\pi\,G}$ y al tensor resulante lo llamamos el tensor de energía esfuerzos. De este mod, se tiene una solución para las ecuaciones de Einstein, pero, como en el caso de Poisson, sin sentido físico. Análogamente al caso newtoniano, se debe dar una expresión para el tensor de energía esfuerzos, $T_{\mu\,\nu}$, que describa una distribución espacio-temporal de la materia-energía válida, física. Es a dicha distribución a lo que se le busca un tensor métrico solución de las ecuaciones de Einstein para dicha distribución.

Los tensores de energía materia que tienen sentido físico son aquellos que describen una distribución razonable de la materia. Puede ser el dar las posiciones y velocidades de un conjunto de partículas y determinar el $T_{\mu\,\nu}$ correspondiente, lo que se hace por medio de los momentos de la ecuación de Boltzmann conservada. Es usual es dar un tensor que describa a un fluido, al fluido perfecto por ejemplo, pidiendo que este describa una situación fisicamente realista. Podemos pedir que sea vacio, que sea debido a un campo electromagnético, aunque esto sea una situación especulativa, determinar la curvatura en el espacio tiempo que genera un campo electromagnético, es, sin embargo, una propuesta válida. Así mismo, se puede considerar al tensor generado con un campo escalar. En fin, el punto es dar un tensor de energía esfuerzos con una interpretación física y a éste es al que se le busca la solución en las ecuaciones de Einstein. No es trivial.

9.1 Espacio-tiempo de Schwarzschild

Dada este reto, el resolver para situaciones físicas un sistema de ecauciones tan complejo, fue (y sigue siendo) admirable el que a los pocos mese de que Albert Einstein publicara sus ecuaciones, Karl Schwarzschild encontrara una solución exacta, analítica, de ellas. Es una solución de vacío, es válido como vimos y, se plante entonces el caso homogéneo de las ecuaciones de Einstein.

Schwarzschild en 1916, con gran ingenio, utilizó las técnicas que ahora son estándar en buscar solución a las ecuaciones diferenciales y es el introducir simetrías. Considera entonces para el espacio-tiempo la

Figura 9.1: Karl Schwarzschild, 1873 - 1916.

máxima simetr'ia, la esférica y que dicho espacio tiempo es estático, es decir, $g_{\mu\,\nu\,,t} = 0, \forall \mu\,\nu$. Dada estas simetrías podemos inferir la forma del elemento de línea correspondiente. En efecto, el espacio-tiempo

sólo depende de la distancia a un punto, no de los ángulos, por lo que sólo puede ser función de las normas $|\vec{x}|, |d\,\vec{x}|$, y su producto $|\vec{x}| \cdot |d\,\vec{x}|$. Al describir el espacio tiempo en coordenadas esféricas, estas condiciones implican que los coeficientes métricos cruzados, t y los ángulos, deben ser cero y que la parte espacial del elemento de línea debe ser proporcional al elemento en esféricas, es decir:

$$ds^2 = -A\,(r)\;c^2\,dt^2 + C\,(r)\;dt\,dr + B\;(r)\;dr^2 + D\;(r)\;r^2\,d\,\Omega^2. \tag{9.2}$$

Ahora, sin pérdida de generalidad, es posible dar una transformación de coordenadas para anular el término cruzado en $dt\,dr$, redefiendo al"radio" , por lo que llego a que la forma más general del elemento de línea para un Universo con simetría esférica y estático es

$$ds^2 = -A\,(r)\;c^2\,dt^2 + B\,(r)\;dr^2 + r^2\,d\,\Omega^2, \tag{9.3}$$

con $d\,\Omega^2 = d\,\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\,\phi^2$, el elemento de ángulo sólido.

Esta es la gran idea de Schwarzschild, el usar las simetrías. Vemos que, de diez coeficiente métricos en general, ahora sólo quedan dos y estos, no son función de las cuatro coordenads, sino sólo de la coordenada radial. El resto ya es directo. Se le da vuelta a la maquinita, (puede ser útil lector@ que lo hagan a mano alguna vez en su vida. Se obienen entonces directamente los Christoffels y las componente no triviales del tensor de Riemann. Actualmente hay los programas de cálculo tensorial que reducen este trabajo a dar una instrucción, como por ejemplo, el programa gr-tensor dentro de Maple. De un modo u otro, las componentes no triviales del tenosr de Riemann son:

$$\begin{gathered} R_{0\,r\,0\,r} = -\tfrac{A''}{2} + \tfrac{B'}{4\,B}\,A' + \tfrac{A'^2}{4\,A},\;\; R_{0\,\theta\,0\,\theta} = -r\tfrac{A'}{2\,B},\;\; R_{0\,\phi\,0\,\phi} = R_{\theta\,t\,\theta\,t}\operatorname{sen}^2\theta, \\ R_{r\,\theta\,r\,\theta} = -r\,\tfrac{B'}{2\,B},\;\; R_{r\,\phi\,r\,\phi} = R_{r\,\theta\,r\,\theta}\operatorname{sen}^2\theta, \\ R_{\theta\,\phi\,\theta\,\phi} = \tfrac{B-1}{B}\,r^2\operatorname{sen}^2\theta, \end{gathered} \tag{9.4}$$

con lo que se obtienen diréctamente las componentes no nulas del tensor de Ricci, (nos conviene sacar los mixtos):

$$\begin{aligned} R^0{}_0 &= -\frac{A''}{2\,A\,B} + \frac{A'\,B'}{4\,A\,B^2} + \frac{A'^2}{4\,A^2\,B} - \frac{A'}{r\,A\,B}, \\ R^r{}_r &= -\frac{A''}{2\,A\,B} + \frac{A'\,B'}{4\,A\,B^2} + \frac{A'^2}{4\,A^2\,B} + \frac{B'}{r\,B^2}, \\ R^\phi{}_\phi = R^\theta{}_\theta &= \frac{1}{2\,r\,B}\left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) + \frac{1}{r^2}\,\left(1 - \frac{1}{B}\right), \end{aligned} \tag{9.5}$$

y de una vez obtenemos el escalar de curvatura:

$$R = -\frac{A''}{A\,B} + \frac{A'\,B'}{2\,A\,B^2} + \frac{A'^2}{2\,A^2\,B} + \frac{2}{r\,B}\left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) + \frac{2}{r^2}\,\left(1 - \frac{1}{B}\right). \tag{9.6}$$

Muy bien, hasta aquí, va pura geometría, le ponemos física pidiendo algo sobre el tensorde energía materia. Schwarazschild investigó cuando dicho tensor es cero, es decir, se busca una solución en vacío, que ya vimos que no necesariamten implica que sea espacio plano, regresaremos a este punto.

Es fácil ver que en este caso, en que las tres componentes del tensor de Ricci quedan igualas a cero, que , al restar $R^0{}_0 - R^r{}_r$, se tiene que $\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0$, es decir, $\ln\,(A\,B)' = 0$, lo que implica que $\frac{A}{B} =$ constante, pero si se pide que el espacio tiempo sea asintóticamente plano, es decir, que el elemento de línea para radios grandes tome la forma plana, lo que implica que los coeficientes A y B se vayan a 1. Pero la relación que acabamos de obtene para estos coeficientes se debe cumplir para todo radio, cin lo que podemos evaluar a esa constante y concluimos por lo que se tiene que los coeficientes métricos deben cumplir que $B = \frac{1}{A}$.

De este modo, resta solo un coefiente métrico por determinar. Al substituir esta relación entre A y B en $R^{\theta}{}_{\theta} = 0$, obtenemos la ecuación $r\,A' + A - 1 = 0$, que se resuelve diréctamente con $A = 1 + fracc_1 r$, con c_1 una constante de integración.

¡Listo! De este modo, se ha determinado una solución a las ecuaciones de Einstein en un caso físico válido e interesante, con simetría esférica y estático.

Queda una constante de integración y, para determinarla, recordamos que en el límite newtoniano, en campo débil, se tiene que donde $g_{00} = -(1 + 2\,\frac{\phi}{c^2})$, con ϕ el potencial gravitatorio y, sabemos que, en el caso de una masa puntal (o distribuida esféricamente), dicho potencial va como $\phi = -G\,M/r$, por lo que comparando la solución obtenida con ésta del límite newtoniano, concluimos que el valor de la constante de integración es concluyo que $c_1 = -2\frac{G\,M}{c^2}$, con M una masa puntual que genera el campo gravitatorio, por lo que la solución para el espacio tiempo es

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)\,c^2\,d\,t^2 - \frac{d\,r^2}{\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)} + r^2\,d\,\Omega^2, \tag{9.7}$$

es una solución para las ecuaciones de Einstein en vacío, la primera solución obtenida y se conoce como la solución de Schwarzschild.

Muy bien, pero, algo queda extraño. Las ecuaciones de Einstein nos dice que la materia curva al espacio, la geometría depende de la materia presente, pero, si estamos en vacío, pues no hay materia que curve, por lo que debería ser una geometría plana. Dado que ya tenemos la solución, el elemento de línea, ec. (**??**), podemos calcular de nuevo a las componentes del tensor de Riemann, ahora ya explícitamente para esta métrica y obtenemos:

$$\begin{gathered} R_{0\,r\,0\,r} = -2\,\tfrac{G\,M}{c^2\,r^3},\;\; R_{0\,\theta\,0\,\theta} = \tfrac{G\,M}{c^2\,r}\,\left(1 - 2\,\tfrac{G\,M}{c^2\,r}\right),\;\; R_{0\,\phi\,0\,\phi} = R_{t\,\theta\,t\,\theta}\,\mathrm{sen}^2\,\theta, \\ R_{r\,\theta\,r\,\theta} = -\frac{\frac{G\,M}{c^2\,r}}{1 - 2\,\frac{G\,M}{c^2\,r}},\;\; R_{r\,\phi\,r\,\phi} = R_{r\,\theta\,r\,\theta}\,\mathrm{sen}^2\,\theta, \\ R_{\theta\,\phi\,\theta\,\phi} = 2\,\tfrac{G\,M}{c^2}\,r\,\mathrm{sen}^2\,\theta, \end{gathered} \tag{9.8}$$

claramente vemos que si M es distinto de cero, las componentes de Riemann también lo son, por lo que que, utilizando el teorema discutido en la sección de Riemann, el espacio no es plano, el espacio es curvo. Entonces, sí tenemos a un caso de vacío pero curvo. ¿Qué es lo que lo curva? pues la masa M, pero si es vacío, ¿dónde está?

Ya vimos que, por construcción el tensor de Ricci y el escalar de curvatura son cero, podemos sacar otro escalar, que es un producto directo y contracción de Riemann consigo mismo, se le llama el escalar de Kretschmann (Erich Justus Kretschmann 1887 1973, no encontramos fotografía de él) y al calcularlo para el espacio-tiempo de Schwarzschild obtenemos :

$$R_{\mu\,\nu\,\lambda\,\tau}\,R_{\mu\,\nu\,\lambda\,\tau} = 48\,\frac{g^2\,M^2}{c^4\,r^6}. \tag{9.9}$$

Una propiedad muy importante de los escalares es su definición, su valor no cambia por cambios en sistemas de referencia. Por ello vemos que este escalar nos dice que en $r = 0$ tenemos una divergencia y, como es una divergencia en un escalar, no es una divergencia que cambia con las coordenadas o con el sistema de referencia. Entonces, el punto $r = 0$ es una divergenica física. Entonces, podemos pensar que nuestra variedad, nuesro espacio-tiempo, es el conjunto de todos los puntos menos el origen, el origen $r = 0$ está excluido pues tiene una divergencia que no puede ser descrita por la Física.

Con este razonamiento, podemos resolver nuestra paradoja. El espacio-tiempo de Schwarzschil es vacío, en efecto y la masa, lo que lo curvó, se encuentra en la singularidad, en un punto ya fuera del espacio-tiempo. Recapitulando, el escalar de Kretschmann en el espacio de Schwarzschild nos muestra que el único lugar donde este espacio tiempo no está definido es en el origen, $r = 0$, consideramos entonces

que este es un punto que no pertence a nuestro espacio-tiempo y que es ahí es donde está la masa. Por lo que podemos interpretar a la solución de Schwarzschild como un espacio donde la materia se concentró toda en un punto, que deja de pertencer a la variedad pero que curvó al espacio tiempo. Curioso, ¿verdad? Recordemos que ésta es una solución estática, no muestra ninguna evolución describe a un hoyo negro que siempre a estado y estará, no cambia. Esta solución no describe el proceso de formación, aquello que da lugar al hoyo negro.

El proceso de formación de un hoyo negro es una historia muy interesante que, resumida es la siguiente: Las estrelals brillan pues su propio peso es tan enorme que, en el centro de ellas alcanzan una presión sufiente para generar reacciones termonucleares de Hidrógeno transformándose a Helio. Dichas reacciones

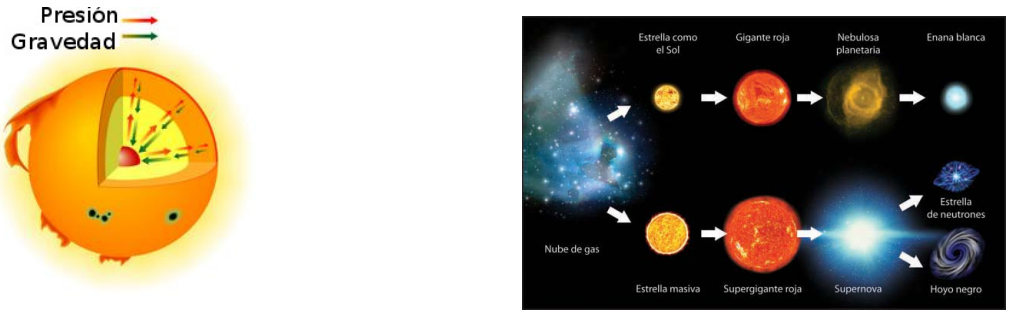


Figura 9.2: Presión vs. gravedad y evolución de las estrellas

generan una presión de radiación suficiente que compensa al peso y la estrella está en equilibrio. Cuando el Hidrógeno empieza a se escazo, el peso de la estrella gana y, dependiendo de la masa, puede alacanzar otro estado de equilibiro, conviertiendo al Helio en Carbono, por ejemplo, o si la masa es suficientemente grande, puede generar una presión que una a los protones con los electrones, creanod una estrella de neutrones y, si es más grande aún, no hay fuerza que se pueda oponer al peso y se colapasará a un punto, formando el hoyo negro. Este sería un hoyo negro no estático, cuya desripción en las ecuaciones de Einstein es mucho más complicada que la solución estática de Schwrazschild y, para hacerlo, es necesario recurrir a las soluciones numéricas.

Otro punto interesante en la geometría del espacio tiempo de Schwarzschild es en $r = 2\,\frac{MG}{c^2}$. Es fácil ver que ahí el elemento de línea, ec. (**??**), tiene problemas. En efecto, la componente g_{tt} se va a cero mientras que la componente g_{rr} diverge. Pero, cuidado, estas son componentes tensoriales, su valor sí cambia de un sistema de referencia a otro, de acuerdo con la ley de transformación de tensores. El escalar de Kretschmann no muestra ningún problema al subsituir $r = 2\,\frac{MG}{c^2}$. De hecho, es posible hacer un cambio de coordenadas donde la métrica no presenta problemas en este radio. Esto implica que $r = 2\,\frac{MG}{c^2}$ no es una singularidad física, como lo es $r = 0$, el problema que se ve surge debido a las coordenadas que estamos utilizando, por lo que se le llama una singularidad coordenada.

Si bien, no hya divergencias, dicha singularidad coordenada sí tiene una propiedad muy interesante. Marca el radio a partir del cual, ningún observador puede regresar, es un verdadero punto de no-retorno, pues ni siquiera la luz puede salir, se le conoce como el horizonte. Esto nos permite definir a un hoyo negro como aquel espacio tiempo con dos regiones, una en la que ni la luz puede salir y otra asintóticamente plana. A la frontera entre estas regiones se le llama horizonte y al radio $r_{\text{Schw}} = 2\,\frac{MG}{c^2}$, se le llama radio de Schwarzschild y es el que pensamos al hablar del tamao de hoyo negro. Un dato que vale la pena tener presente es el considerar a un hoyo negro con la masa del Sol. Si bien se sabe que el Sol no evolucionará hacia un hoyo negro, pues no tiene la masa suficiente, es interesante ver de qué tamao sería si toda su masa se colapsara. Entonces, con $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\text{N}\,\text{m}^2}{\text{kg}^2}$, $c = 299\,792\,458\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y, para la masa del Sol, $M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}\,\text{kg}$, obtenemos que se formaría un hoyo negro de radio igual a $r_{\text{Schw}\odot} = 2952.37\,\text{mts}$.

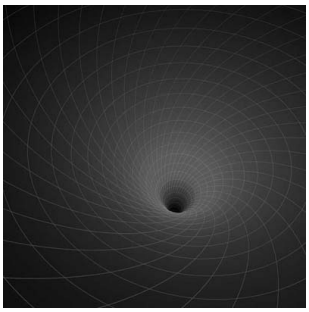


Figura 9.3: Diagrama artístico de un hoyo negro

Sería un objeto de un poco menos de 3 kilómetros de radio.

De este modo, vemos que los hoyos negros son una solución de las ecuaciones de Einstein en vacío, son una predicción teórica de un cierto tipo de espacio-tiempos. Hay procesos que explican su formación como la etapa final de cierto tipo de estrellas. Pero, pueden argumentar ciertos estudiantes, ¡no se ha visto ningún hoyo negro!

Visto como tal, pues no, ¡dado que son negros! pero hay mucha evidencia de su presencia, sobre todo en el centro de las galáxias, incluyendo la nuestra. En efecto, las observaciones detalladas y de larga duración de cuerpos en la zona del centro de la Via Lactea, que está a unos 27,000 años luz de nosotros, muestran a cuerpos orbitando alrrededor de algo con brillo mucho menor que el de los cuerpos en esa

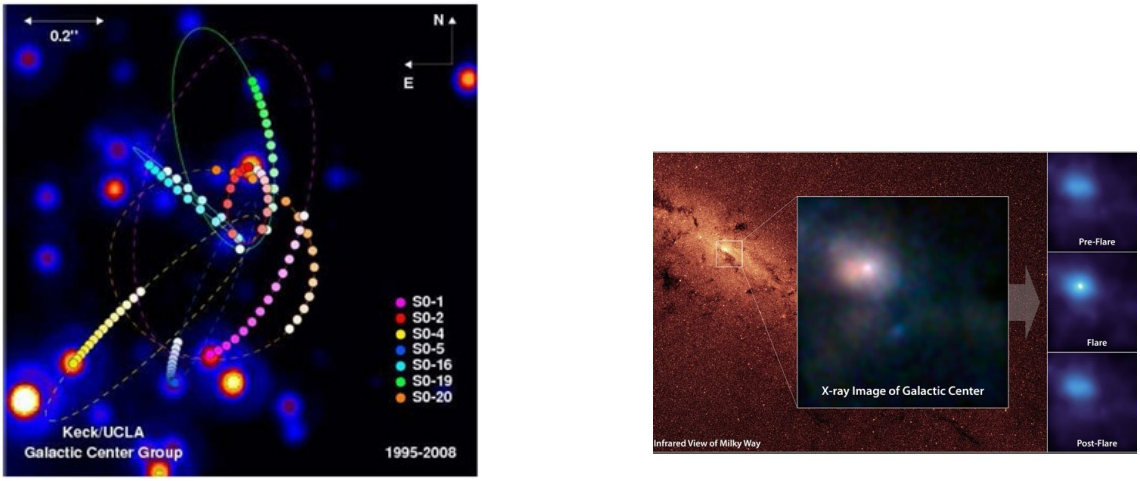


Figura 9.4: Dinámica en el centro de la Vía Lactea

zona. La órbita y luminosidad de los cuerpos que se observan, permite inferir que se tiene a un cuerpo muy masivo, del orden de 4.4 millones de masas solares, ocupando un volumne muy reducido (de otro modo hubiese interacutado y destruido al cuerpo) y con una luminosidad muy inferior a la luminosidad opbservada de los cuerpos en esa zona. Se puede calcular que, cuando cae materia al hoyo negro, dicha materia siente una gran aceleración y, por efectos de fricción consigo misma, al ir cayendo a un volumen menor, emite radiación en forma de rayos X. dicha radiación también se ha observado.

Todo ello forma un conjunto de pruebas que nos permiten afirmar que, en efecto, hay un hoyo negro super masivo en el centro de la galaxia y, de hecho, se considera que la mayoría de las galaxias tienen hoyo negros super masivos en su centro.

No podemos terminar esta sección sin por lo menor tocar un punto fundamental. Muy bien, ya vimos que las ecuaciones de Einstein son la manera covariante de describir a la interacción gravitatoria; nos dan un paradigma nuevo y muy diferente al que ofrece la Física de Newton, vemos esa interacción entre geometría y materia y hasta ya tenemos una solución que es la manera de ver a la acción de una masa puntual; más aún, hay evidencias que implican la existencia de estos objetos en las galaxias. Perfecto, pero, ¿Cómo sabemos que esto es correcto?

Como ya discutimos, una teoría es correcta, no por su belleza o su autoconsistencia, sino porque mejor describa a la Naturaleza. Esto fue lo que mostró Einstein. Son dos fenómenos muy importantes que prueban lo que se quería, el tener una predicción dada por una teoría y una diferente dada por otra. Hacer las observaciones correspondientes y ver cuál teoría describe mejor o es más consistente con la observación.

El primero de estos fenómenos es una observación que ya se conocía durante el siglo XIX y es la precesión del perihelio de Mercurio: En efecto, se tenía ya una medición de que el perihelio de mercurio

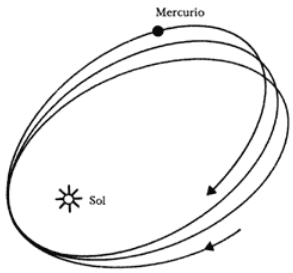


Figura 9.5: Precesión en el perihelio de Mercurio, exagerada en el dibujo.

se desplazaba, una cantidad pequeña, 42.98 segundos de arco por siglo, pero medible y, el problema es que no se podía explicar con la teoría de gravitación newtoniana; simplemente no es un efecto que ocurra en ésta física. Es por ello que, la solución de Schwarzschild no sólo tenía el interés de ser una solución a las ecuaciones de Einstein, sino que se podía usar para modelar al sitema solar. Si bien, el Sol no es un hoyo negro, sí se puede considerar como una masa puntual, de hecho es como se considera para derivar la dinámica planetaria, por lo que la solución de Schwarzschild se usó para describir la dinámica en el espacio tiempo de una masa puntual. Después de todo, si no estamos cerca del hoyo negro, así es como se comporta.

Como mostramos en la siguiente sección, las trayectorias de los cuerpos, es decir, las geodésicas en Schwarzschild, se pueden resolver hasta cuadraturas de un modo directo, por lo que no es difícil determinar la trayectoria de los cuerpos y... *Voilà!* al substituir para la órbita de Mercurio se tiene este efecto de precesión, en excelente acuerdo con las observaciones. De hecho, todos los planetas lo tienen, pero el valor es aún más pequeño. De este modo, la teoría de la relatividad general no sólo contiene a los resultados y predicciones de la teoría newtoniana, sino que puede explicar fenómenos donde la teoría newtoniana queda muda.

Pero tal vez el más espectacular, el fenómeno de relatividad general *par excellence* es el de lente gravitatoria. Es un fenómeno que muestra el gran ingenio de Einstein. Se tiene al modelo de Newton con la fuerza gravitatoria y, por el otro lado, al modelo de Einstein con geometría. Entonces, veamos un caso donde no hay fuerza gravitatoria, pero sigue habiendo geometría. Este es justo el efecto que piensa Einstein al considerar que, dado que el fotón no tiene masa, $m_\gamma = 0$, al pasar cerca del Sol, el fotón no sentirá ninguna fuerza gravitatoria por parte de éste, por lo que su trayectoria continuará sin inmutarse. Por otro lado, desde el punto de vista de la relatividad general, el fotón sin importar que no tenga masa, viaja en un espacio que, en la presencia del Sol se curva, por lo que, al pasar cerca de éste, su trayectoria

sí se verá afectada y, de hecho, se puede cuantificar, no es mucho, tampoco es que se vaya al otro lado, pero es medible, en el caso del Sol, pasándo en la orilla, la deflección es de $1.75''$. Así tenemos un caso claro en el que no es que como el el fenómeno de Mercurio, la teoría newtoniana lo vea, sino que aquí sí da una predicción y es cero, no hay deflección y la relatividad general, el modelo de espacio-tiempo curvo, da una predicción diferente, cuantificable.

Más aún, Einstein sugirió el experimento donde ésto se podría medir. Durante un eclipse. En efcto, la idea es determinar con presición la posición relativa de las estrellas, las distancias entre ellas, en una regón donde se sabe que ocurrirá un eclipse. Una vez con esas mediciones, se espera al eclipse y, cuando el cielo se obscurezca y se vean las estrellas, volver a medir la posición relativa de las estrellas. Aquellas cuya luz pase justo en la orilla del Sol, sentirán el efecto de curvatura y se verán desplazadas con respecto a las que están más lejos y entonces este efecto sea despreciable. En la siguente sección, al resolver las geodésicas para el caso de partículas tipo luz, fotones, es posible ver claramente ésta predicción de la relatividad general.

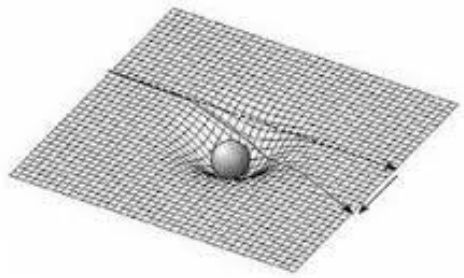


Figura 9.6: Medición del cambio de posición de una estrella durante un elipse solar

Al conocer esto, fue Arthur Eddington quien se entusiasmó con la idea y organizó dos expediciones para observar al eclipse totales de Sol que ocurriría en ese año, 1919. Una iría a Brasil y otra a la isla Sao Tome y Príncipe, en las costas occidental de frica, frente al actual Gabón. Eddington partió a Sao Tome para observar el eclipse solar del 29 de mayo de 1919. Parece ser que la expedición de Eddington tuvo

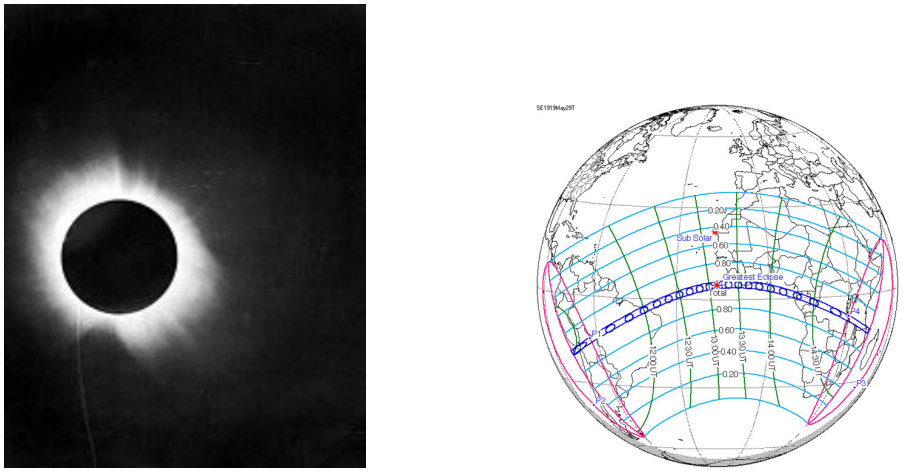


Figura 9.7: Fotografía del eclipse hecha por Eddington, así como la trayectoria de dicho eclipse

varios exabruptos, pero al final, se lograron tomar las ansiadas fotografías durante el eclipse solar y poder

medir la posición relativa de las estrellas, sobre todo, de aquellas cuya luz pasaba lo más cerca posible de la orilla solar. Una vez con las fotografías, las estudió, trabajó y finalmente publicó su resultado donde afirmaba que sus mediciones, en efecto comprobaban a la teoría de la relatividad general. El modelo de espacio-tiempo curvo, es consistente, cualitativa y cuantitativamente con las observaciones. Este fue un gran empuje a la teoría de Einstein y logró su aceptación por la comunidad internacional.

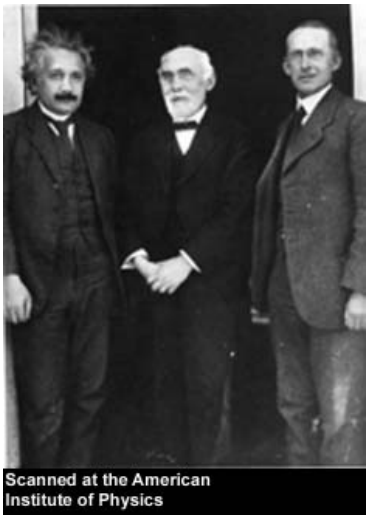


Figura 9.8: Arthur Stanley Eddington, 1882 - 1944 y con Albert Einstein y Hendrik Antoon Lorentz

Actualmente, el efecto de lentes gravitatorios se observa en muchos sistemas en cosmología, a muy diversas escalas [**?**]

Estos temas que hemos platicado, así como otros relacionados, como los hoyos negros rotantes y los cargados, pueden ser discutidos con presición y detalle en capítulos posteriores que se pudieran cubir en un siguiente curso. Por ahora, aquí detenemos el tema de los hoyos negros.

9.1.1 Espacio-tiempo de Friedman - Lemaître

Otra solución a las ecuaciones de Einstein, un poco más complicada que la de Schwarzschild, fue determinada por Aleksandr Friedman en 1922 - 1924, también a los pocos años de que Einstein había propuesto sus ecuaciones.

Figura 9.9: Aleksandr Aleksándrovich Friedman, 1888 - 1925.

Nuevamente, Friedman utiliza las simetrías, pero ahora buscando una solución para un fluido perfecto en el que consideró que dicho fluido era homogéneo e isotrópico, es decir, existe un sistema de referencia en el que sus parámetros, como densidad y presión, son independientes de la posción, por lo que sólo pueden depender del tiempo coordenado. Esta consideración, aplicada a nuesrto Universo, es lo que actualmente se conoce como **el Principio Cosmológico**: Nuestro Universo es, espacialmente, homogéneo e isotrópico. Es decir, todos los puntos, de una sección espacial, son equivalentes (no se quiere volver a tener problemas de definir un centro, un punto privilegiado) y tampoco hay direcciones preferentes, es equivalente, en una sección espacial, el desplazarse hacia una dirección que hacia otra. Es decir, las secciones espaciales sí pueden cambiar, pero lo hacen con todos los puntos, no en regiones independientes.

Dichas condiciones nos implican que se debe tener simetría esférica en cada punto de las secciones espaciales. La distancia entre puntos sólo puede depender de su norma, no de su dirección, por lo que se tiene, para la sección espacial, que $dl^2 = A(r)\, d\, r^2 + r^2\, d\,\Omega^2$, con $d\,\Omega^2 = d\,\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\,\phi^2$, la diferencial de ángulo sólido que ya hemos visto. Más aún, el Principio Cosmoógico implica que las hipersuperficies tengan curvatura constante, es decir que su su escalar de curvatura sea constante. Cuando se calcula el escalar de curvatura, asociado con la hipersuperficie, se obtiene una única ecuación dierencial para $A(r)$

$$ {}_3R = \frac{2}{r^2\, A(r)^2}\left(r\, \frac{dA(r)}{dr} + A(r)^2 - A(r) \right) \ , \tag{9.10} $$

al suponer que ${}_3R = 6\, k$ =cte y que $\lim A(r) = 1\, (r \to \infty)$ se obtiene la forma del coeficiente métrico consistente con el Principio Cosmológico: $A = 1/(1 - k\, r^2)$. De este modo, el elemento de línea espacial sólo puede representar a tres tipos de espacios, a tres tipos de secciones espaciales: a la plana, a una

cerrada o a una abierta. Es decir,

$$A(r^2) = \begin{cases} 1 & \text{si la seccion espacial es plana,} \\ \frac{1}{1-r^2} & \text{si la seccion espacial es cerrada,} \\ \frac{1}{1+r^2} & \text{si la seccion espacial es abierta.} \end{cases} \tag{9.11}$$

En efecto, es claro ver que, si $A = 1$, el elemento de línea espacial queda $dl^2 = d\,r^2 + r^2\,d\,\Omega^2$, plano en coordenadas esféricas. Si $A = \frac{1}{1-r^2}$, el elemento espacial tiene la forma $dl^2 = \frac{d\,r^2}{1-r^2} + r^2\,d\,\Omega^2$; si definimos $r^2 = \text{sen}^2\zeta$, es directo ver que el elemento de línea toma la forma $dl^2 = d\,\zeta^2 + \text{sen}^2\zeta\,d\,\Omega^2$, que es el de una 3-esfera, por ello son secciones espaciales con la forma de 3-esfera y se les llama cerradas. Finalmente, si $A = \frac{1}{1+r^2}$, ahora se define $r^2 = \text{senh}^2\psi$, con lo que el elemento de línea toma la forma $dl^2 = d\,\psi^2 + \text{senh}^2\psi\,d\,\Omega^2$, que son secciones hiperbólicas, por lo que la sección espacial es abierta.

De manera unificada podemos escribir al elemento de línea de la sección espacial, consistente con el Principio Cosmológico como $\frac{d\,r^2}{1-k\,r^2} + r^2\,d\,\Omega^2$, con la k, como vimos, relacionada con el escalar de curvatura de dicha hipersuperfcie. Finalmente, como se quiere que dicha simetría se mantenga para todo tiempo, obtenemos que el elemento de línea del espacio-tiempo consistente con el Principio Cosmológico, encontrado por Friedman es

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + a^2(t)\,\left(\frac{d\,r^2}{1-k\,r^2} + r^2\,d\,\Omega^2\right), \tag{9.12}$$

donde a la función a, que sólo depende del tiempo coordenado, se le llama **factor de escala**. También lo podemos llamar **factor de encajamiento**, ya que nos muestra cómo toda la sección espacial se va metiendo al espacio-tiempo.

Dada esta forma del elemento de línea, Friedmann buscó que fuese solución de las ecuaciones de Einstein con fluido perfecto.

Como en el caso de Schwarzschild, esta es ya la idea genial, el describir la forma del espacio tiempo; el resto es hacer derivadas y sumas; bueno, hasta llegar a las ecuaciones donde nuevamente hay que analizar las cosas, pero, en términos de buscar la solución, como vemos, lo importante está en el planteamiento.

Respecto al fluido perfecto, cuyo tensor de energía esfuerzos viene dado por la ec. (**??**), como se vió en uno de los ejercicios, para el observador comóvil, que se mueve junto con el fluido, por lo que, en este sistema de referencia, el fluido está en reposo, por lo que su cuadrivelocidad se reduce a $u^\mu = (u^0, \vec{0})$, y, de la normalización, $u^\mu\,u_\mu = -c^2$, para la geometría de Friedman, ec. (**??**), tenemos que $u^0 = c$. Se vió entonces que dicho tensor se puede escribir como

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\mu\,c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{9.13}$$

Y escribimos a las ecuaciones de Einstein de la forma $G^\mu{}_\nu = \frac{8\,\pi\,G}{c^2}\,T^\mu{}_\nu$. el cálculo del tensor de Einstein, $G^\mu{}_\nu$ a partir de la métrica de Friedman ec. (**??**), es directo y obtenemos entonces que sólo hay dos ecuaciones diferenciales no triviales (la temporal y las tres espaciales ${}^i{}_i$ que dan la misma ecuación)

$$3\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\,\pi\,G}{c^2}\,\mu, \tag{9.14}$$

$$-2\,\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} = \frac{8\,\pi\,G}{c^4}\,p, \tag{9.15}$$

donde denotamos a punto, como derivada respecto al tiempo en unidades de distancia, $c\,t$. Antes de intentar resolverlas, hay un punto intersante. Como sabemos, el tensor de energía esfuerzos debe satisfacer que su divergencia es cero. Por lo que, para nuestro caso, $T^{\mu}{}_{\nu\,;\,\mu} = 0$ implica la ecuación:

$$c^2\,\dot{\mu} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(c^2\,\mu + p\right) = 0, \tag{9.16}$$

pero esta ecuación es dependiente de las de Einstein. Claramente, si se satisfacen las de Einstein, se satisface la de conservación, por lo que tenemos tres ecuaciones pero solo dos funcionalmente independientes, escojemos las más sencillas y el sistema a resolver es:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\,\pi\,G}{3\,c^2}\,\mu, \tag{9.17}$$

$$c^2\,\dot{\mu} + 3\,H\,\left(c^2\,\mu + p\right) = 0, \tag{9.18}$$

donde hemos definido a la razón de la derivada del factor de escala al factor de escala, la derivada logarítmica, como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{9.19}$$

que se conoce como la función de Hubble.

Aquí las cosas ya no le empezaron a gustar a Einstein, pues él abogaba por un Universo estático, es decir, en el cual $\dot{a} = 0$, por ende $H = 0$ y eso implicaba que si las secciones espaciales eran planas, ambas suposiciones en boga en 1920, se pensaba que el Universo era inmutable y casi plano, se teniá entonces que la única solución era la trivial, un espacio-tiempo sin materia, Minkowski.

Aparte del punto de vista de Einstein, las ecuaciones sí resultaban muy interesantes. Veamos a la ec. (**??**). Si la evaluamos al día de hoy y es costumbre normalizar al factor de encajamiento $a_0 = a(t = \text{hoy}) = 1$, se tiene

$$k = {H_0}^2\,\left(\frac{8\,\pi\,G}{3\,c^2\,{H_0}^2}\,\mu_0 - 1\right), \tag{9.20}$$

donde H_0 es la función de Hubble evaluada al día de hoy, lo que se conoce como la **constante de Hubble** y μ_0 es la densidad del Universo al día de hoy. De ésta ecuación vemos que el valor de k está determinado por la magnitud de la densidad al día de hoy. En efecto, conociendo el valor de la constante de Hubble y la densidad, podemos determinar algo tan interesante como la curvatura de las secciones espaciales de nuestro Universo, de acuerdo al modelo de Friedman. Al valor de la densidad al día de hoy que hace que la sección espacial sea cero, se le conoce como **densidad crítica**:

$$\mu_{\text{critica}} = \frac{3\,c^2\,{H_0}^2}{8\,\pi\,G}, \tag{9.21}$$

así, de acuerdo al modelo de Friedmann, si la densidad del Universo al día de hoy es mayor que la crítica, las secciones espaciales serán cerradas, tendremos un Universo con secciones espaciales de 3-esfera. Si la densidad del Universo al día de hoy es menor a la crítica, las secciones espaciales de nuestro Universon serán hiperbólicas, un Universo abierto. Y si la densidad del Universo al día de hoy es igual a la crítica, las secciones espaciales del Universo donde vivimos serán planas, tendremos a un Universo abierto y su sección espacial plana.

Tomando el valor más reciente que se ha obtenido para la constante de Hubble [**?**],

$$H_{0\text{Planck}} = 67.3 \pm 1.2\,\frac{\text{km}}{\text{s}\,\text{Mpc}}. \tag{9.22}$$

. Ya que estamos usando valores, es muy importante considerar las unidades que se estén utilizando. Como se ha mostrado, a lo largo de estas notas hemos mantenido explícitamente en todas las ecuaciones a

las constante físicas, a diferencia de muchos textos y trabajos donde trabajan con las llamadas unidades geométricas, donde se considera $G = c = 1$ o las llamadas unidades naturales, $\hbar = c = 1$. Siendo consistentes con que la coordenada temporal en el espacio tiempo es $c\,t$, con unidades de distancia. Por ello, la función y constante de Hubble, ecs. (**??**), tienen unidades de inverso de distancia. Los valores reportados son utilizanod unidades donde $c = 1$, por lo que, para utilizar el valor reportado, este debe ser dividido entre la velocidad de la luz, es decir, $H_0 = H_{0\text{Planck}}/c$. Al utilizarlo entonces en la expresión para la densidad crítica, ec. (**??**), la velocidad de la luz se cancela en ella, quedando $\mu_{\text{critica}} = \frac{3\,{H_{0\text{Planck}}}^2}{8\,\pi\,G}$ que, incidentalmente, es la expresión que se obtiene en los textos que utilizan $c = 1$, como el Weinberg, [**?**]. Dicho lo cual, expresamos a la constante de gravitación universal como,

$$G = 4.297\ \times 10^{-6}\ \left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2\ \frac{\text{Kpc}}{M_{\text{Sol}}} = 4.297\ \times 10^{-9}\ \left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2\ \frac{\text{Mpc}}{M_{\text{Sol}}}, \tag{9.23}$$

(expresar a G en estas unidades es muy útil al trabajar en problemas de cosmología, con M_{Sol} denota a la masa del Sol, $M_{\text{Sol}} = 1.98\ \times\ 10^{33}$ grs.); la velocidad de la luz dadas las unidades de $H_{0\text{Planck}}$ no es necesaria, por lo que obtenemos que la densidad crítica, aquella para la cual, de acuerdo a este modelo, un atomito más y el Univeso se cierra o igual o uno menos y el Universo se expande para siempre, no son varias toneladas sobre metro cúbico, ni la del agua, ni la de una nubecilla, sino es (1parsec $= 3.08\ \times\ 10^{18}$ cms)

$$\mu_{\text{critica}} = 1.26\ \times\ 10^{11}\,\frac{M_{\text{Sol}}}{\text{Mpc}^3} = 8.54\ \times\ 10^{-30}\,\frac{\text{grs}}{\text{cm}^3}, \tag{9.24}$$

un valor muy pequeño, dicha densidad se está logrado alcanzar en los laboratorios que trabajan en vacíos. El mejor vaciío se ha logrado en el CERN y es cerca de 10^{-13} atm $= 10^{-29}$gr/cm^3, ya cerca de la densidad crítica. Es interesante entonces que el Universo con densidades del órden de la crítica es un Universo, prácticamente vaciío, sí hay galaxias y cúmulos, pero repartidos en un enorme espacio que dejan que a una densidad promedio cercana a los vacíos que se están logrando en los laboratorios.

Siguiendo con el estudio de las ecuaciones de campo, definimos entonces la razón de la densidad μ a la densidad crítica, como

$$\Omega = \frac{\mu}{\mu_{\text{critica}}}, \tag{9.25}$$

y la ecuación de Einstein, ec. (**??**) la reescribimos como:

$$H^2 = {H_0}^2\,\Omega - \frac{k}{a^2}, \tag{9.26}$$

es decir,

$$\dot{a} = \sqrt{{H_0}^2\,\Omega\,a^2 - k}, \tag{9.27}$$

esta forma de escribir a la ecuación diferencial es muy útil para poder resolverlas, una vez que conocemos a la densidad, μ como función del factor de escala, a. Para ello, nuevamente el, la, estudiante atento, se da cuenta que tenemos dos ecuaciones diferenciales (ya que vimos que las dos de Einstein y la de continuidad son funcionalmente dependientes) y tres incógnitas, a, μ y p. Para cerrar el sistema necesitamos una ecuación extra y esta es la que se conoce como **ecuación de estado**, una relación entre la presión p y la densidad, μ. Desde el punto de vista físico, necesitamos decir qué tipo de materia es la que tenemos para poder cerrar el sistema y así determinar cómo se expande el Universo y cómo cambia la materia en él.

Pero, antes de hablar de la ecuación de estado, hay un punto importante que señalar que involucra a la ecuación de continuidad. En el sistema comóvil la ecuación $j^{\mu}{}_{;\,\mu} = 0$ implica $\rho_0\,u^0{}_{;\,0} = 0$. Para el elemento de línea de Friedman, ec. (**??**), la normalización de la cuadrivelocidad, $u^\mu\,u_\mu = -c^2$, implica que $u^0 = c$, por lo que la ecuación de continuidad queda, usando las propiedades de derivada covariante:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\left(\sqrt{-g}\,\rho_0\right)_{,\,t} = 0. \tag{9.28}$$

Ahora, dado que el determinante del tensor métrico para el elemento de Friedman es $g = -a^6 \, \frac{r^4}{1-k\,r^2} \, \mathrm{sen}^2\theta$, y como las coordenada son independientes, la ecuación de continuidad implica $(a^3 \, \rho_0)_{,\,0} = 0$, por lo que concluimos:

$$a^3(t) \, \rho_0 = \mathrm{cte}, \tag{9.29}$$

lo cual es una relación interesante y, ya pensándola, muy natural. Nos dice que la densidad de materia en reposo varía como el cubo del factor de escala. Si pensamos que el factor de escala es una medida del sector espacial inmerso en el cuadriespacio, tenemos que la densidad de materia en reposo varía con el inverso del volumen, lo que, para una situación en la que no se crea ni destruye materia, es natural.

Relacionamos así ρ_0 con el factor de escala. Dada la definición de densidad, $\mu = \rho_0(1+\epsilon)$, lo que nos queda entonces es determinar la relación entre la energía interna y el factor de escala. Entonces, para cerrar al sistema necesitamos, como decíamos, relacionar la densidad, μ, con la presión, p, es decir, dar una ecuación de estado.

Ahora, ¿de qué estaba formado el Universo en su inicio? Es lo que se llama, **la sopa cósmica**, ¿cuáles eran sus ingredientes? Pues se considera que había electrones, protones, fotones, neutrinos, algún campo escalar. Nosotros consideraremos ahora un modelo en el que sólo haba algún tipo de materia, como la bariónica, representada digamos por neutrones, que la podemos tratar como un fluido sin presión, es decir, como polvo, $p = 0$.

Al tener esta relación para la presión, se cierra el sistema y podemos integrar la ecuación de conservación, ec. (**??**). Reescribiéndola como derivadas respecto al tiempo:

$$c \, \frac{d\,\mu}{d\,t} + \frac{3}{a} \, \frac{d\,a}{dt} \, c\,\mu = 0, \tag{9.30}$$

que se resuleve diréctamente, obteniendo que la densidad, μ, así como la densidad en reposo, rho_0, en el caso de polvo va como a^{-3}:

$$\mu = \frac{\mathrm{cte}}{a^3(t)} = \frac{\mu_0}{a^3(t)}, \tag{9.31}$$

donde hemos evaluado la constante, utilizanod la normalización de que el factor de escala, al día de hoy, vale uno, con lo que μ_0 denota la densidad de dicho polvo al día de hoy. Utilizando la definición de $\mu = \rho_0\,(1+\epsilon)$, con ϵ la energía interna del polvo, vemos que en este caso, dicha energía interna es una constante: $\epsilon = \frac{\mu_0}{\rho_{00}} - 1$, con ρ_{00} la densidad de materia en reposo al día de hoy. De hecho, dicha constante es cero, pues para el polvo, como no hay interacción entre las partículas, la energía interna es cero. Todo es consistente y coincide la densidad μ con la densidad en reposo, ρ_0. De este modo, $\Omega = \frac{\mu}{\mu_{\mathrm{critica}}} = \frac{\mu_0}{\mu_{\mathrm{critica}}\,a^3} = \frac{\Omega_{0\,\mathrm{polvo}}}{a^3}$.

Ya con la densidad determinada en términos del factor de encajamiento, resta resolver la ecuación de Friedman, ec. (**??**), que reescribimos para dejarla en forma integral, integrando de 0 a a/a_0 el factor de escala y de 0 a t el tiempo

$$\int_0^{\frac{a}{a_0}} \frac{d\,a}{\sqrt{\frac{\Omega_{0\,\mathrm{polvo}}}{a} + 1 - \Omega_{0\,\mathrm{polvo}}}} = c\,H_0 \int_0^t d\,t, \tag{9.32}$$

donde hemos usado la ecuación (**??**) para la constante de las secciones espaciales, y la hemos escrito en términos de la razón de densidades: $k = {H_0}^2 \, \left(\Omega_{0\,\mathrm{polvo}} - 1\right)$.

Haremos el estudio para cada curvatura, es decir, para cada valor de k. El caso $k = 0$ es inmediato, $\Omega_{0\,\mathrm{polvo}} = 1$, ya que la densidad es igual a la crítica en este caso y tenemos que nuestra ecuación se reduce a

$$\int_0^{\frac{a}{a_0}} \sqrt{a}\,d\,a = c\,H_0\,t, \tag{9.33}$$

con lo que obtenemos la siguiente expresión para el factor de escala:

$$a(t) = a_0 \ (c\,H_0\,t)^{\frac{2}{3}} \,. \tag{9.34}$$

¡Listo! Tenemos nuestro primer modelo del Universo donde han quedado determinadas todas las funciones. Veámoslo entonces con cierto detalle. Tenemos para el factor de encajamiento, una función que va desde un tiempo inicial, $t = 0$, en el que este encajamiento vale cero. Esto es, el modelo tiene un inicio, donde toda la sección espacial se empieza a meter, a encajar en el cuadriespacio; del elemento de línea, ec. (**??**), vemos que las distancias espaciales a tiempo constante, $t = T = \text{cte}$ son

$$dl^2 = a_0 \ (c\,H_0\,T)^{\frac{2}{3}} \ \left(dr^2 + r^2\,d\,\Omega^2\right), \tag{9.35}$$

al anularse el factor a, se anulan las distancias, ¡Es un punto en el cuadriespacio! A este punto inicial se le llamó el *átomo cósmico* y después se llamó **Big Bang** que, como vemos, no es un punto del espacio, es un punto del espaciotiempo y, dado el caso, es un tiempo, en el que toda la sección espacial se empieza a encajar en el cuadriespacio. Tenemos entonces que, nuevamente, este modelo, como el de Schwarzschild, presenta una singularidad y ahora, esta singularidad sí está en contacto causal con el resto del cuadriespacio, no está cubierta por ningún horizonte.

Posteriormente, al avanzar el tiempo, avanza el encajamiento de las secciones espaciales. La distancia espacial entre los puntos, ec. (**??**), aumenta, ¡el Universo se expande! Las cantidades físicas, como la densidad y la densidad en reposo van como

$$\mu = \frac{\mu_0}{c^2\,{H_0}^2\,t^2}, \tag{9.36}$$

por lo que divergen al tiempo inicial. Se empieza entonces, en este modelo, con un punto del espaciotiempo donde la densidad era divergente y, conforme le Universo se expande, las secciones espaciales, la densidad va decreciendo, de hecho, como el tiempo a la menos dos.

Podemos incluisve saber cuánto tiempo ha transcurrido desde la gran explosión. Diréctamente de la ecuación (**??**), a $t = \text{hoy}$, donde $a(t = \text{hoy}) = a_0 = 1$, tenemos que ha transcurrido un tiempo dado por

$$t_{\text{hoy}} = \frac{1}{c\,H_0}, \tag{9.37}$$

nuevamente, utilizando el valor de H_0 obtenido en la misión Planck (consideran un modelo de Universo diferente, más completo, pero, nos da idea, de hecho, bastante buena), se tiene que $c\,H_0 = 2.18 \times 10^{-18}\,\text{Hertz}$, con lo que obtenemos que la edad del Universo, el tiempo transcurrido desde el Big Bang es

$$\text{Edad del Universo} = 14.51 \ \text{Giga} - \text{años}. \tag{9.38}$$

Por último, mencionamos que, esta distancia a tiempo constante, ec. (**??**), nos permite definir en general a la **distancia propia**, (por simplicidad, tomamos a ángulos constante también)

$$l_{\text{propia}} = a(t)\,r, \tag{9.39}$$

que nos permite definir una velocidad de recesión:

$$v_{\text{rec}} = \dot{a}(t)\,r, \tag{9.40}$$

que, evaluada al día de hoy, nos permite inferir la velocidad con la que se alejan los puntos, unos de otros, debido a la expansión cosmológica:

$$v_{\text{rec}} = H_0\,r, \tag{9.41}$$

es decir, se alejan más rápido conforme se encuentran más lejos.

De este modo, el modelo de Universo de Friedman nos da una descripción de cómo cambia la geometría, cómo se espanden las secciones espaciales y, como va cambiando la materia presente en él, permitiéndonos inferir resultados físicos.

El modelo de Friedman, si bien criticado inicialmente por Einstein, fue ampliamente defendido y profundizado por Georges Lemaître, que le encantaba la idea de un Universo con un inicio. Por ello, el modelo se conoce como Universo de Friedman-Lemaître.

Figura 9.10: Georges Henri Joseph Édouard Lemaître, 1894 - 1966.

Para terminar la descripción del modelo, veamos los otros dos casos, cuando la densidad de materia es mayor a la crítica, donde tendermos a un Universo cerrado, con $k = 1$ y cuando la densidad de materia es menor a la crítica, donde tendremos un Universo, como el del caso plano, abierto.

Entonces, para el caso con $k = 1$, tenemos que la ecuación de Einstein, ec. (**??**), tiene $\Omega_{0_{\text{polvo}}} - 1$ positivo, pues en este caso tenemos una densidad del Universo, mayor a la crítica. Al hacer la integral,

$$\int_0^{\frac{a}{a_0}} \frac{d\,a}{\sqrt{\frac{\Omega_{0_{\text{polvo}}}}{a} + 1 - \Omega_{0_{\text{polvo}}}}} = \frac{\Omega_{0_{\text{polvo}}}}{2\,\left(\Omega_{0_{\text{polvo}}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \left(-2\,\sqrt{y\,(1-y)} + \tan^{-1}\left(\frac{2\,y-1}{2\,\sqrt{y\,(1-y)}} \right) - \frac{3\,\pi}{2} \right), \tag{9.42}$$

donde hemos definido $y = a\,\left(\Omega_{0_{\text{polvo}}} - 1\right) / \left(a_0\,\Omega_{0_{\text{polvo}}}\right)$ y recuerda lector@ que $\tan^{-1}(-\infty) = 3\,\pi/2$. Por lo que en este caso, la ecaución de Einstein nos da una ecuación trascendente para el factor de encajamiento en términos del tiempo.

Las ecuaciones trascendentes, lo son tanto para los humanos, como para las máquinas, es decir, en este caso, lector@, no se tiene una ecuación trascendente y se espera que las computadoras la resuelvan. Hay que pensarle un poco.

La manera más directa de lidiar con una ecuación trascendente, es parametrizándola, es decir, expresar tanto a la variable, como a la función, en términos de un parámetro que nos permita trabajar con la variable y con la función.

De la ecuación (**??**), se ve que ese término con arco tangente, es latoso, por lo que definimos al argumento como el inverso de la función: $\frac{2\,y-1}{2\,\sqrt{y\,(1-y)}} = \tan\left(\theta + \alpha\right)$, donde θ es él parámetro que estamos buscando y α es una fase para fijar el origen, como veremos. Resolvemos ésta relación para la función

y, obteniendo $y = (1 + \text{sen}\,(\theta + \alpha))/2$. Como queremos que el factor de escala esté parametrizado siendo igual a cero en cero, escojemos a la fase tal que cumpla esto: $\alpha = 3\,\pi/2$. Las propiedades trigonométricas y las integrales se pueden buscar en línea o, con cierta añoranza, en [**?**].

De este modo, tenemos que el factor de encajamiento queda parametrizado como

$$a = a_0 \left(\frac{\Omega_{0\text{polvo}} - 1}{\Omega_{0\text{polvo}}} \right) \frac{1 - \cos\,\theta}{2}, \tag{9.43}$$

y, al substituir en la ecuación de Einstein integrada, ec. (**??**), tenemos, simplificando

$$\frac{\Omega_{0\text{polvo}}}{2\,\left(\Omega_{0\text{polvo}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}\,\left(-\text{sen}\,\theta + \theta\right) - = c\,H_0\;t, \tag{9.44}$$

con lo que queda también parametrizado el tiempo, la variable. Vemos que $\theta = 0$ implica $t = 0$. Tenemos entonces que ya podemos graficar a la función $a(t)$, el factor de escala para el caso en el que la densidad es mayor a la densidad crítica y las secciones espaciales son 3-esferas. Damos un valor de θ y obtenemos la correspondiente pareja $[c\,H_0\,p\,t(\theta), a(\theta)/a_0] = [\theta - \text{sen}\theta, (1 - \cos\theta)/2]$, con $p = 2\,\left(\Omega_{0\text{polvo}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}/\Omega_{0\text{polvo}}$. La gráfica de este comportamiento la mostramos en la figura (**??**).

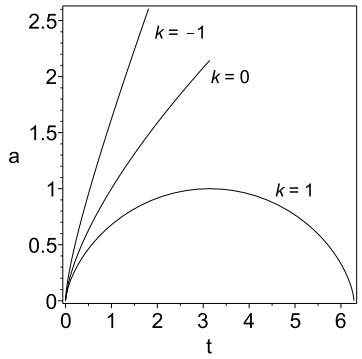


Figura 9.11: Comportamiento del factor de escala en el modelo de Friedman-Lemaître para cuando el Universo tiene las secciones espaciales planas, $k = 0$, hiperbólicas, $k = -1$, o de 3-esferas, $k = 1$ Los dos primeros casos muestran que el factor de encajamiento crece sin límite, mientras que el caso $k = 1$ de este modelo, cuando la densidad de materia es mayor a la crítica, el factor de encajamiento crece, pero posteriormente decrece y se recolapsa. Por simplicidad, estamos tomando los coeficientes en t y en el factor de escala igual a uno en los tres casos.

Muy interesante. Es la gráfica de una cicloide. Entonces, en el modelo de Friedmann-Lemaître, cuando las secciones espaciales son 3-esferas, la densidad de materia es mayor a la densidad crítica y el Universo se expande, alcanza un radio máximo y se recolapsa.

Finalmente, el caso con densidad menor a la crítica, donde $k = -1$. En este caso, la integral de la ecuación (**??**) sigue siendo válida, pero ahora $\Omega_{0\text{polvo}} < 1$, por lo que $y <$ y nos conviene cambiar a la variable $y \to -\bar{y}$, por lo que el coeficiente en dicha ecuación toma la forma

$$\int_0^{\frac{a}{a_0}} \frac{d\,a}{\sqrt{\frac{\Omega_{0\text{polvo}}}{a} + 1 - \Omega_{0\text{polvo}}}} = \frac{\Omega_{0\text{polvo}}}{2\,\left(1 - \Omega_{0\text{polvo}}\right)^{\frac{3}{2}}}\,\left(2\,\sqrt{\bar{y}\,(1 + \bar{y})} - \tanh^{-1}\left(\frac{2\,\bar{y} + 1}{2\,\sqrt{\bar{y}\,(1 + \bar{y})}}\right) - \frac{3\,\pi}{2}\right), \tag{9.45}$$

donde usamos que $\tan^{-1}(i\,x) = i\tanh^{-1}(x)$ y que $\tanh^{-1}(\infty) = i\,3\,\pi/2$. Con un procedimiento análogo al caso con $k = 1$, pidiendo ahora que $(2\,\bar{y}+1)/(2\,\sqrt{\bar{y}\,(1+\bar{y})} = \tanh(\theta+\alpha)$, (conviene definir $\theta = i\,\Psi$, $\alpha = i\,beta$, desarrollar y luego regresar). Se obtiene en este caso:

$$a = a_0\,\frac{\Omega_{0_{\rm polvo}} - 1}{\Omega_{0_{\rm polvo}}}\,\frac{\cosh\,\theta - 1}{2}, \tag{9.46}$$

un factor de encajamiento que, como el caso plano, crece sin límite. Para el tiempo, obtenemos en este caso

$$¸H_0\,t = \frac{\Omega_{0_{\rm polvo}}}{2\,\left(1-\Omega_{0_{\rm polvo}}\right)^{\frac{3}{2}}}\,\left(\mathrm{senh}\,\theta - \theta\right). \tag{9.47}$$

De este modo, queda también parametrizada la soulción en este caso y la hemos graficado en la figura (**??**), donde se ve claramente cómo crece el factor de escala ilimitadamente en este caso. También hemos graficado el caso plano parametrizado en este caso, de un modo trivial, $c\,H_0\,t = \theta$, por lo que $a = a_0\,\theta^{\frac{2}{3}}$.

De este modo, presentamos al modelo de Friedman - Lemaître. Hay quien le llama también incluyendo los nombres de Robertson y de Walker, pero los autores no hemos podido determinar cuál fue su contribución al modelo. Ya hablando de nombres, el caso en el que el factor de escala va como el tiempo a la dos tercios, que es el caso de Friedman-Lemaître para secciones espaciales planas, se le llama Universo de Einstein-de Sitter, pero, nuevamente, no vemos justificado el llamar así a este caso particular del modelo.

Muy bien, tenemos una solución a las ecuaciones de Einstein con fluido perfecto polvo, que es homogénea e isotrópica. Pero ... ¿Tiene algo que ver con nuestro Universo?

El tema es ... apasionante y da lugar a cursos posteriores y trabajos de investigación. Por ahora presentaremos sólo un breve resumen de la extensión del modelo de Friedman - Lemaître a lo que se le llama el **modelo cosmológico estándard** y su comparación con las observaciones cosmológicas de primer orden.

Como vemos, una de las predicciones del modelo es la expansión de las secciones espaciales, este encajamiento que vemos determinado por el factor de escala, $a(t)$, produce que la distancia entre los cuerpos se modifique, aumente si el factor crece. Lemaître, como mencionamos, era un gran defensor del modelo y abogó mucho por él, argumentando que el corrimiento al rojo que se veía en las galaxias, no era por un movimiento propio de cada galaxia, sino que era el movimiento general debido a la expansión. De

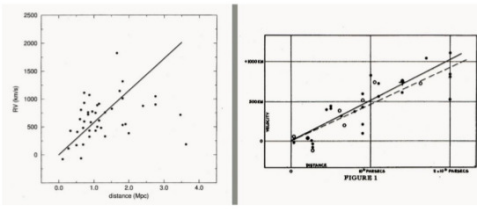


Figura 9.12: Observaciones sobre el corrimiento al rojo de las galaxias y su interpretación cosmoógica. A la izquierda, la de Lemaître, 1927, a la derecha, la de Hubble, 1929.

hecho, Lemaître mostró, en 1927, que la velocidad con la que se alejaban era proporcional a la distancia. Esta relación fue redescubierta un par de años más tarde por Hubble, aunque él no la interpretaba como evidencia de la expansión del Universo:

$$v = H_0\,d, \tag{9.48}$$

Figura 9.13: Edwin Hubble, 1889 - 1953.

esta relación es muy importante y, como vemos, es la derivada en el modelo Friedman-Lemaître, ec. (**??**), lo que evidencía la concordancia del modelo con observaciones reales. Este modelo, sí estaba describiendo aspectos cosmológicos de nuestro Universo.

Otro aspecto muy importante es el de la radiación electromagnética en el Universo. En este caso, se puede incluir en el modelo de Friedman-Lemaître, a la radiación, aparte del polvo, como parte de la materia que forma al Universo. Esto fue realizado e impulsado principalmente por Georgi Gámov.

Figura 9.14: Georgi Antónovich Gámov, (George Gamow), 1904 - 1968.

En efecto, al considerar en la sopa cósmica a los fotones, lo cual se puede representar por un fluido donde la velocidad del sonido coincide con la de la luz, lo que ocurre al considera un fluido con ecuación de estado $p_{\text{rad}} = \rho_{\text{rad}}\, c^2/3$. Tomando esto en cuenta, un análisis similar al presentado para el caso de polvo, nos permite concluir que, en este caso, la relación entre esta densidad de radiación y el factor de escala es $\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}$, lo que, considerando a dicha densidad de radiación como la energía de un cuerpo

negro, al aplicar la ley de Stephan-Boltzmann, $\rho_{\text{rad}} \propto \sigma T^4$, Gámov concluye que

$$T \propto \frac{1}{a(t)}, \tag{9.49}$$

la temperatura del Universo varía como el inverso del factor de escala. Entonces, en el inico empieza siendo divergente y ba bajando la temperatura conforme el Universo se expande. Por ello, predice Gámov, nuestro Universo, de acuerdo al modelo Friedman-Lemaître, debe tener acutalmente una temperatura de fondo, una radiación de fondo homogénea e isótropa. Más aún, dado que ya se tenía una manera de calcular el tiempo pasado desde el inicio, se podía tener una idea de la magnitud de ésta temperatura de fondo, que Gámov calculó, en 1948, era del órden de 50^o K.

Dicha radiación fue descubierta, accidentalmente, por A. Penzias y R. Wilson (no ponemos foto por lo accidental del hecho), en 1964 y les fue otorgado el premio Nobel en 1967, sin ningún reconocimiento a Gámov, ni a ningún otro teórico.

En fin, esta fue una prueba más de la bondad del modelo Friedman-Lemaître para describir efectivamente a las características generales de nuestro Universo. Nuestro Universo, en efecto, sí está descrito por el modelo Friedman-Lemaître.

La última pruba comológica del modelo la dió la Física de partículas. Al estudiar al Universo, se descubrió que la materia que vemos en él, está compuesta fundamentalmente por Hidrógeno y, en segundo lugar, por Helio. Más aún, se puede determinar que están en una proporporción 4 a 1. Esto, como decimos, es un dato observacional.

Por otro lado, al considerar la sopa cósmica en un ambiente con temperaturas y densidades inicialmente divergentes y que, debido a la expansión, van disminuyendo, se puede calcular el camino libre medio de las diferentes partículas que forman a la sopa, como función del tiempo. Al estar a altas temperaturas y denisdades, son muy probables las colisiones y fusiones entre las partículas y, al ir bajando la temperatura y la densidad, por la expansión, baja la probabilidad de dichas fusiones hasta que ya no se dan más. La proporción de iones de Helio que se alcanzan a formar por fusión de protones, Hidrógeno, se puede calcular y, ¡maravilla! se obtiene que esta proporción es de 0.24, en excelente acuerdo con el dato observacional de 1 a 4.

De este modo, el modelo Friedman-Lemaître, es consistente con las tres observaciones cosmológicas de nuestro Universo: la radiación cósmica de fondo, la recesión de las galaxias, con todo y ley Lemaître-Hubble y con la abundancia relativa entre Hidrógeno y Helio. Por ello, se considera que el modelo describe adecuadamente al Universo y se le llama, el modelo cosmológico estándard.

Quedan aún muchas sorpresas que ha dado la investigación del Universo, como las misteriosas componentes obscuras, la materia y la energía obscuras, que son, como mencionamos, temas de investigación y acaloradas polémicas actualmente y forman, por sí mismas, temas con suficiente material para discutirse en cursos completos, por lo que, con cierta tristeza, no profundizamos en explicaciones más detalladas de las observaciones, ni de las nuevas investigaciones cosmológicas, esperando que el, la lector@ haya disfutado de esta "probadita" del modelo, una muestra de la gran riqueza y profundidad de las ecuaciones de Einstein.

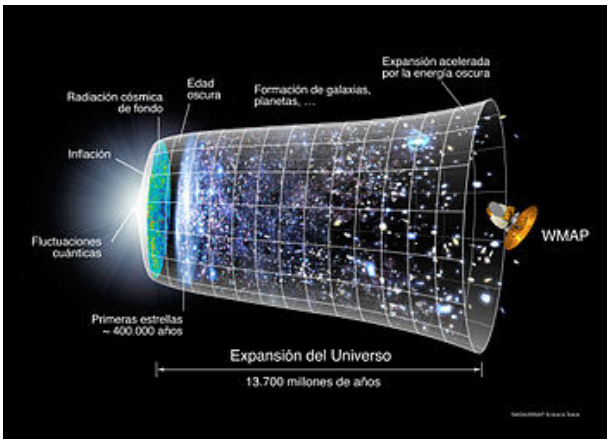


Figura 9.15: Historia del Universo

Capítulo 10

Movimiento en el espacio tiempo de Schwarzschild.

Un tema muy interesante y formativo es el del movimiento de partículas libres en espacio-tiempos curvos. No sólo nos muestra una cinemática muy interesante, sino que, además, es muy ilustrativo para lidiar con ecuaciones diferenciales. En esta sección estudiaremos al movimiento de partículas libres, es decir, a las geodésicas, en el espacio tiempo de Schwarschild.

Es interesante que las simetrías de este este espacio, como vimos, esfericidad y estaticidad, nos permiten resolver la ecuación de las geodésicas,

$$\frac{d^2\,x^\mu}{d\,\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\,\beta}\,\frac{d\,x^\alpha}{d\,\lambda}\,\frac{d\,x^\beta}{d\,\lambda} = 0, \tag{10.1}$$

sin siquiera calcular los símbolos de Christoffel. En la ecuación anterior, λ es un parámetro, se conoce como parámetro afín y, para partículas no son tipo tiempo, este parámetro puede ser el tiempo propio.

Usamos a las propiedades de la Lagrangiana. entonces, tomamos a la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -(1 - r_s/r)c^2dt^2 + \frac{1}{1 - r_s/r}dr^2 + r^2\,d\Omega^2, \tag{10.2}$$

donde hemos utilizado el radio de Schwarzschild $r_s := 2MG/c^2$.

Como vimos, esta métrica, corresponde a una solución estacionaria, esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein en vacío.

Las ecuaciones geodésicas están dadas en general por (**??**). Esta representación permite calcular las ecuaciones construyendo los símbolos de Christoffel a partir de la métrica. Sin embargo, como mencionamos, es posible obtener las geodésicas directamente de la métrica y luego de éstas, uno puede simplemente leer los símbolos de Christoffel.

El lagrangiano para una partícula en el espacio tiempo de Schwarzschild es (diréctamente el elemento de línea sobre el tiempo propio (parámetro afín) al cuadrado, es decir, la norma de la cuadrivelocidad, dividimos entre dos para quitarnos doces que bajan al derivar)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \left(-(1 - \frac{r_s}{r})c^2\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin\theta\dot{\varphi}^2\right)/2. \tag{10.3}$$

Punto denota derivadas con respecto al parámetro afín λ. En el caso de partículas con masa tomaremos este parámetro como el tiempo propio de la partícula. Para obtener las ecuaciones de movimiento escribimos las ecuaciones de Euler

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{10.4}$$

Primero, hay que resaltar que la métrica no depende de φ y como consecuencia el lagrangiano tampoco, es lo que se conoce como una variable cíclica, así que de la ecuación para φ se tiene que $d(r^2 \sin\theta\dot{\varphi})/d\lambda = 0$. La cantidad conservada asociada a φ queda como

$$r^2\dot{\varphi} = \text{cte} = L_\varphi. \tag{10.5}$$

Además, debido a la simetría esférica del espacio tiempo la geodésica debe permanecer en un plano. Podemos restringir entonces el estudio al plano $\theta = \pi/2$ y como consecuencia las ecuaciones relativas a θ se satisfacen trivialmente. Notamos, sin embargo, que no es necesario el fijar al ángulo θ. En efecto, se puede mostrar que el momento angular total,

$$L^2 = {L^2}_\theta + \frac{{L^2}_\varphi}{\text{sen}^2\theta}, \tag{10.6}$$

con L_θ el momento conjugado a la variable θ:

$$L_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = r^2\,\dot{\theta}, \tag{10.7}$$

es una cantidad conservada, es decir, $\dot{L^2} = 0$. Para mostrar esto se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange para θ: $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$, es decir $(r^2\,\dot{\theta})^{\cdot} - r^2\,\text{sen}\theta\,\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0$.

Por otro lado, podemos ver que la coordenada temporal t, también es cíclica, por lo que su momento conjugado, es una cantidad conservada, e:

$$-\,(1 - \frac{r_s}{r})c\,\dot{t} = \text{cte} = -e\,c. \tag{10.8}$$

Claramente, estas cantidades son las equivalentes a la conservación de los momentos generalizados que se encuentran en la formulación Analítica de la Mecánica Clásica.

Ya tenemos tres de las coordenadas integradas. Nos falta ver la coordenada radial, r. Esta, claramente, no es cíclica, pero tenemos, una constricción: la norma de la cuadrivelocidad. Es decir, para obtener la ecuación para r utilizaremos que

$$-\,(1 - \frac{r_s}{r})\,c^2\,\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) = \frac{d\,s^2}{d\,\lambda^2} = -\kappa, \tag{10.9}$$

donde $\kappa = 1$ o $\kappa = 0$ si se trata de partículas masivas o sin masa respectivamente. Al sustituir (**??**) y (**??**) en (**??**) se encuentra que:

$$-\,\frac{e^2}{1 + \frac{r_s}{r}} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{L^2}{r^2} = \kappa, \tag{10.10}$$

la cual podemos escibir como:

$$\dot{r}^2 = e^2 - V(r), \qquad V(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \kappa\right), \tag{10.11}$$

Esta ecuación puede interpretarse como la ecuación de una partícula que se mueve bajo la influencia de un potencial efectivo V.

De este modo, como prometimos, vemos que las cuatro coordenadas, como funicón del parámetro afín, han sido integradas una vez. La ecuación de geodésicas nos da a las segundas derivadas de éstas coordenadas respecto al parámetro afín, en términos de los Christoffel y productos de las primeras derivadas de las coordenadas. Utilizando la Lagrangina, hemos logrado encontrar expresiones para las primeras derivadas de las cuatro coordenadas; hemos bajado en un órden el problema y, como decimos, ¡sin haber

tenido que escribir las ecuaciones de las geod"esicas! Cuando el problema queda en términos de derivadas de primer orden, es decir, integrales, se dice que el problema queda resuelto a cuadraturas.

El problema del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild queda, de este modo, resuelto en cuadraturas.

Veamos más explícitamente las trayectorias. En el caso de partículas masivas, existe una relación muy importante entre el valor de su momento angular y el potencial. Los extremos del potencial estan dados por ($V' = 0$):

$$r_\pm = \frac{r_s}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1-6a}\right), \qquad a = \frac{{r_s}^2}{2\,L^2}\ . \tag{10.12}$$

Que corresponden a un máximo y mínimos locales. El comportamiento de las partículas es muy diferente si $a < 1/6$ o $a > 1/6$ como veremos a continuación.

Para $a < 1/6$ caso en el que existen dos raíces reales, se puede acotar el valor de las raíces por

$$\frac{3}{2}r_s \leq r_- \leq 3r_s, \quad \text{y} \quad r_+ \geq 3r_s\ . \tag{10.13}$$

Es posible hacer una clasificación de las órbitas mediante un análisis del potencial efectivo, justo como en el caso de mecánica clásica. Hay que notar que la partícula se mueve sobre una línea horizontal con $e^2 = \text{cte}$ en una región en donde $e^3 > V$ para asegurar que $\dot{r}^2 > 0$.

El siguiente paso es encontrar a r y φ como función del parámetro, sin embargo, para entender el comportamiento de las órbitas es suficiente encontrar $r = r(\varphi)$. Como sabemos, el movimiento de las partículas se da en un plano, esto es, θ constante. Y podemos orientar nuestros ejes para que este ángulo sea $\theta = \pi/2$. De este modo, $\dot{\theta} = 0$ y $L = L_\varphi$ y $\dot{\varphi} = L_\varphi/r^2$.

Entonces, podemos determinar a r como función del ángulo, lo que nos da la imagen de la trayectoria. Para hallar la ecuación diferencial en términos del ángulo notemos entonces que $\dot{r} = r_{,\varphi}\dot{\varphi} = L_\varphi\, r_{,\varphi}/r^2$. Si además definimos una nueva función $u = r_s/r$ con derivada $u_{,\varphi} = -r_s/r^2 r_{,\varphi} = -u^2 r_{,\varphi}/r_s$ se obtiene $(u_{,\varphi})^2 - 2\,a\,e^2 + (1-u)(u^2 + 2a\kappa)$.

$$u_{,\varphi}(2u_{,\varphi\varphi} + 2u - 2a\kappa - 3u^2) = 0\ . \tag{10.14}$$

Sin considerar la solución trivial de $u = cte$, se obtiene que

$$u_{,\varphi\varphi} + u = a\,\kappa + 3/2u^2. \tag{10.15}$$

Las condiciones iniciales para u se obtienen a partir de los valores de L_φ, e y $r_0 = r(\lambda = 0)$. Notemos que $r_{,\varphi} = \dot{r}_0/\dot{\varphi} = \dot{r}_0\, r_0^2/L_\varphi$ y $u_{,\varphi} = -r_s r_{,\varphi}/r^2 = -r_s\dot{r}_0/h$ y a su vez $\dot{r}_0 = [e^2 - V(r_0)]^{1/2}$.

A continuación estudiamos el comportamiento de las órbitas a partir del análisis del potencial. Hay que notar que es diferente del correspondiente potencial central en el caso newtoniano; las soluciones no son sólamente las cónicas y, en este caso, las partículas sí pueden caer hasta el centro

En la figura **??** se muestra el potencial efectivo para una partícula con un momento angular $L_\varphi = 4.1$. Se tienen 4 diferentes órbitas de acuerdo con el valor de e^2 en la ecuación (**??**). En las graficas siguientes consideramos que la partícula esta inicialmente en $r = 30$.

En la figura hemos caracterizado las órbitas por los valores $e_i, i = 1...4$. El comportamiento de la partícula para e_1 a partir de la gráfica del potencial nos dice que la partícula estará en una órbita acotada, entre dos valores de r, es importante señalar que partiendo del análisis del potencial no podemos afirmar si la órbita es cerrada, justo como en el caso de mecánica clásica para un potencial central. En la figura **??** se muestra la trayectoria de la partícula para ese valor de e_1. Nótese como la trayectoria va de un radio mínimo a un radio máximo pero no es una trayectoria cerrada. Cuando el valor de la energía es tal que e_2 es el mostrado en la figura **??** la partícula situada del lado derecho del máximo de potencial tendera a un valor mínimo, en el cual $e_2 = V$ y despues saldra dispersada hacia infinito. Esta trayectoria

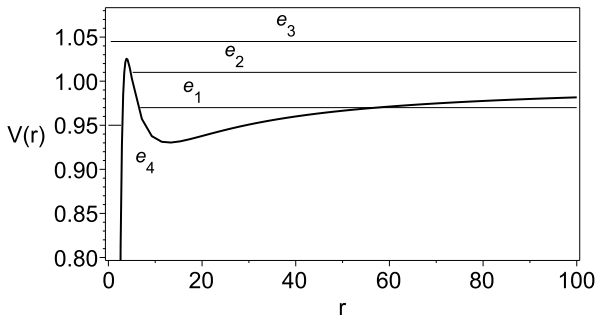


Figura 10.1: Potencial efectivo correspondiente a un valor de $L_\varphi = 4.1$. Las órbitas están descritas por su energía que se mantiene constante.

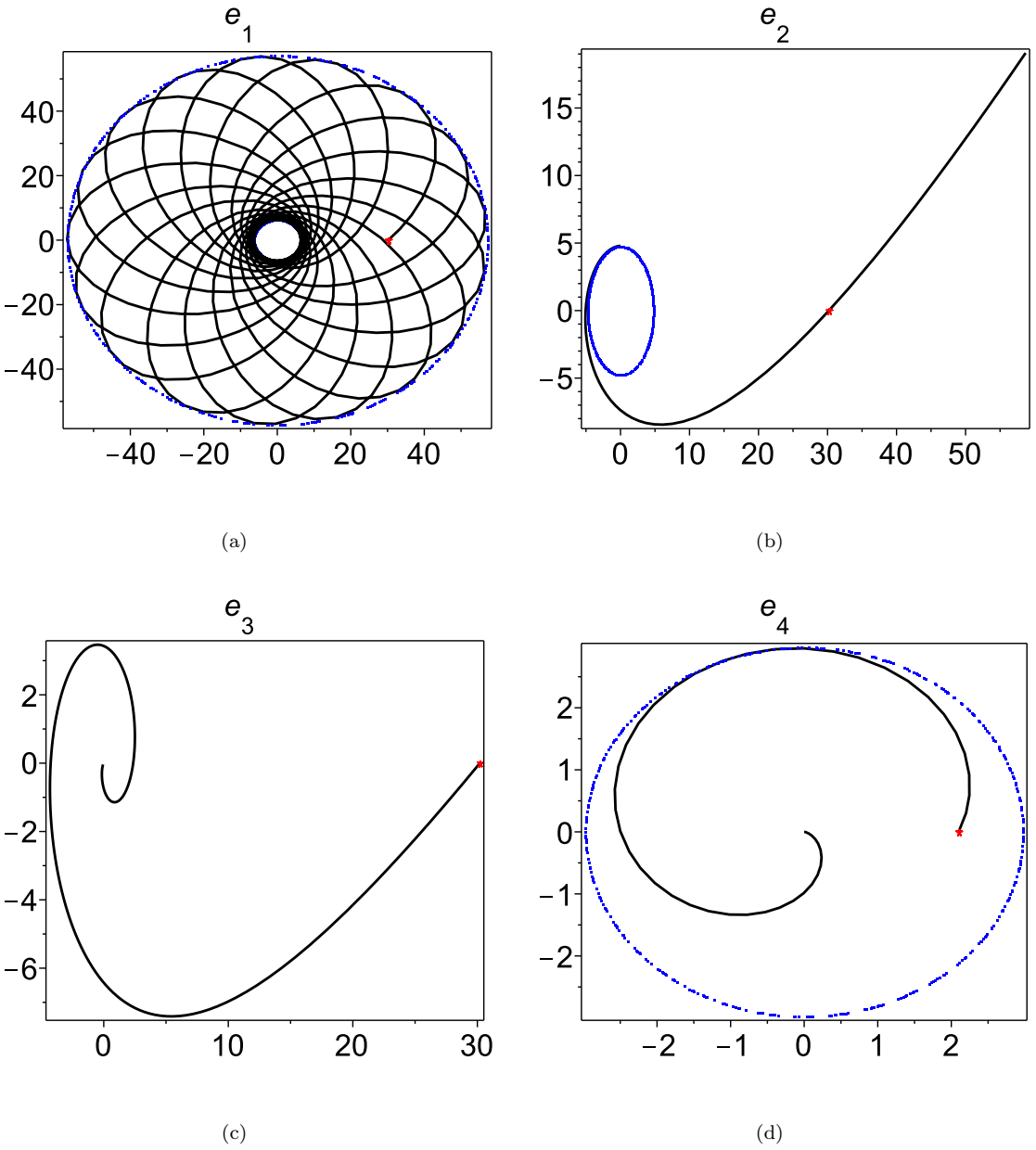
se muestra en la figura **??**. Cuando la partícula tiene una energía tal que e sobrepasa el máximo del potencial efectivo, es decir algo como e_4, la partícula alcanzará en centro de atracción en $r = 0$. La figura correspondiente a esta trayectoria se muestra en la figura **??**. Finalmente, cuando la partícula se encuentra del lado izquierdo del máximo del potencial y es lanzada hacia afuera, alcanzá un radio máximo (en donde $e_4 = V$) y luego caerá hacia $r = 0$, como se muestra en la figura **??**.

Cuando el valor del momento angular de la partícula no es muy grande, digamos $h = 3.8$, la forma del potencial es la mostrada en la figura **??**. Ahora el máximo local de potencial es menor que su valor asintótico ($V \to 1$). Para e_1 el valor de la energía de la partícula está entre el máximo local y el valor asintótico. Las propiedades de las trayectorias son similares al caso anterior pero difieren de forma cualitativa. Por ejemplo, en ambos casos las órbitas están acotadas entre los valores de r en los que $e_1 = V$. Pero en este caso intermedio, las órbitas son cerradas.

Para un valor de e_2 como el mostrado en **??**, la partícula alcanzará un radio máximo (en donde $e_2 = V$) y luego caerá hacia $r = 0$. La trayectoria se muestra en la figura **??**. Para la trayectoria e_4 el comportamiento es parecido al caso con momento angular mayor. La partícula simplemente alcanzará $r = 0$. La trayectoria se muestra en **??**. Para e_4 si la partícula se encuentra a la izquierada del máximo relativo, alcanzara un radio máximo y caerá al centro de atracción. El comportamiento se muestra en la figura **??**.

Si el momento angular de la partícula es peqeño comparado con los casos anteriores, $h = 1$ por ejemplo, se tienen solo dos tipos de órbitas. Su comportamiento depende del valor de e relativo a V. En la figura **??** se muestra el potencial efectivo para este caso. El potencial ya no tiene un máximo ni un mínimo relativos (aunque el valor asintótico sigue siendo 1) por lo que no se tendrán órbitas que vayan de un r máximo a un r mínimo. Se tienen órbitas como e_3 en que simplemente caen hacia el centro de atracción y aquellas como e_4 que alcanzan un r máximo cuando $e_4 = V$ y luego caen hacia $r = 0$. Estas órbitas se muestran en la figura **??**.

En el caso de partículas sin masa $\kappa = 0$ el potencial efectivo tiene un máximo en $r = \frac{3}{2}r_s$ y su valor asintótico es cero, su forma se encuentra graficada en la figura **??**. Para este potencial, tres tipos de órbitas son posibles: Si la partícula tiene una energía correspondiente a e_2, la partícula que llega desde infinito, alcanza el potencial en un radio mínimo y luego es expulsada de nuevo hacia infinito como lo muestra la figura **??**. Si la energía de la partícula es mayor que el máximo de potencial, esta caerá hacia el centro de atracción como lo muestra la figura **??**. Por otro lado, si la partícula se encuentra a la izquierda del máximo de potencial y tiene una velocidad inicial hacia afuera, entonces alcanzará un radio máximo y luego caerá hacia $r = 0$ como se puede ver en la figura **??**.



(a) (b) (c) (d)

Figura 10.2: Diferentes tipos de órbitas. Cuando la partícula tiene una energía e_1 su órbita esta acotada entre dos valores de $r = cte$, sin embargo no corresponde a una elipse o circunferencia como el caso Newtoniano. La curva presenta un movimiento de precesión. Es este el tipo de movimiento que siguen los planetas de nuestro sistema solar. El efecto de precesión es mas evidente en Mercurio por ser el planeta mas cercano al sol. Si la partícula tiene una energía e_2 caerá hacia el centro de atracción alcanzando un radio mínimo y luego continuara su movimiento hacia infinito. Si la energía es e_3, la particula caerá hacia el centro de atración. En el caso que la energía es e_4 la partícula no puede sobrepasar la barrera de potencial, de modo que alcanza un radio máximo y luego cae.

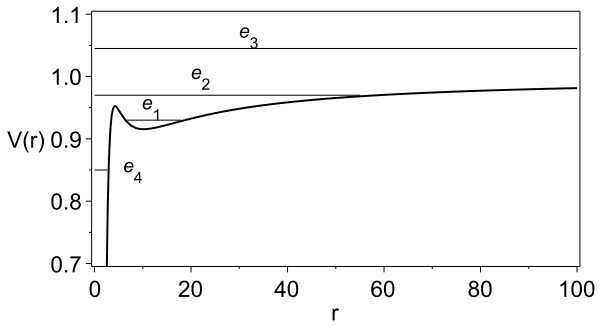
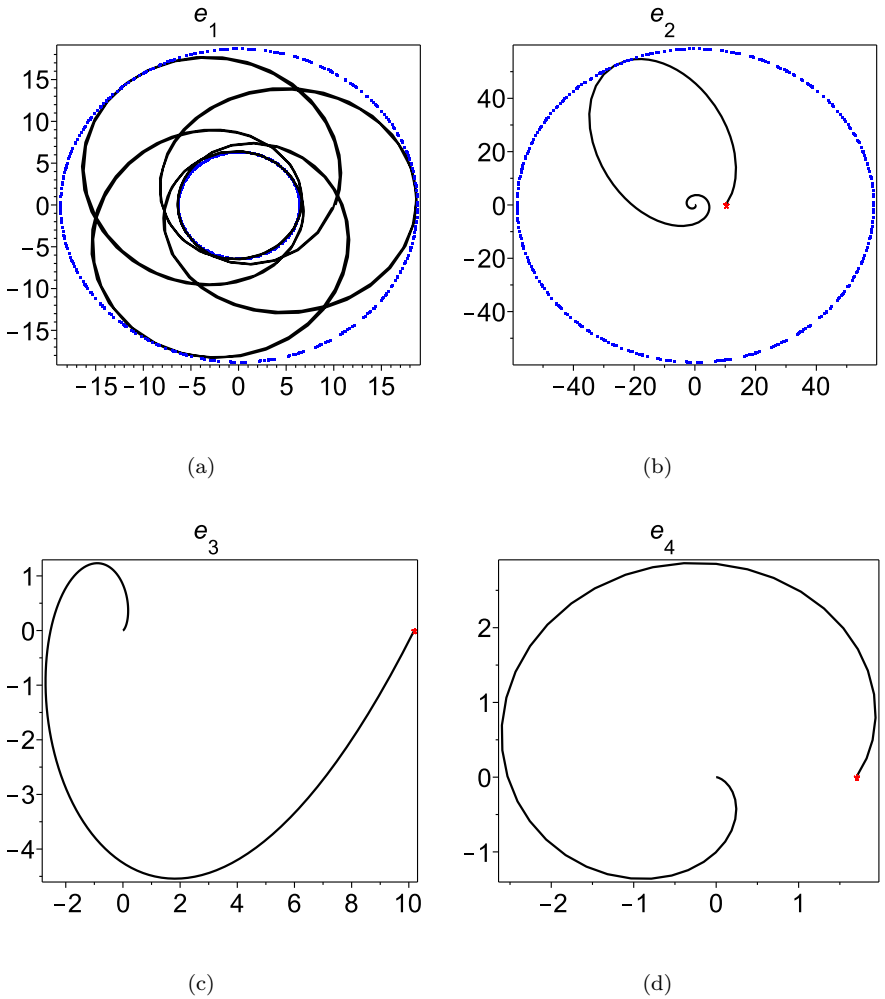


Figura 10.3: Potencial efectivo para $L_\varphi = 3.8$.



(a) (b)

(c) (d)

Figura 10.4: Diferentes tipos de órbitas.

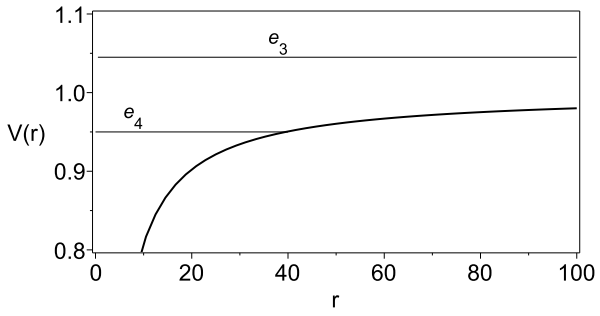
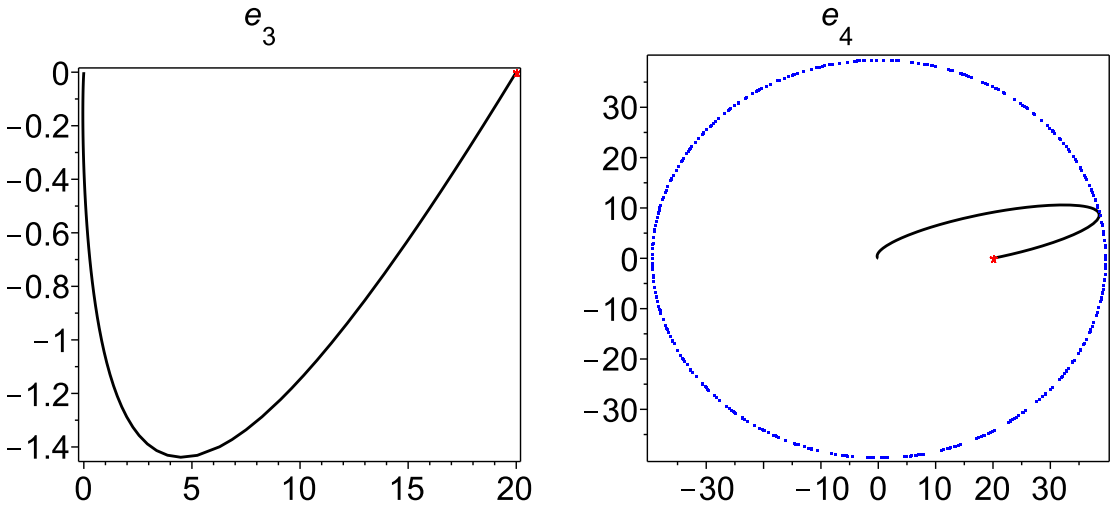


Figura 10.5: Potencial efectivo.



(a) (b)

Figura 10.6: Diferentes tipos de órbitas.

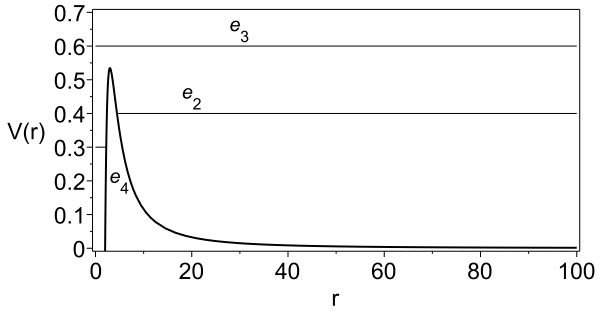
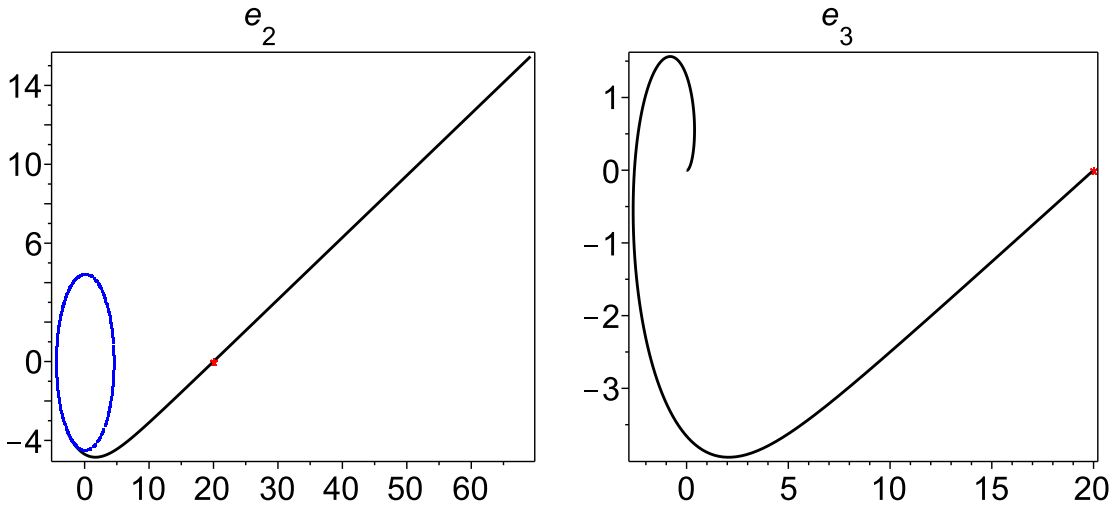
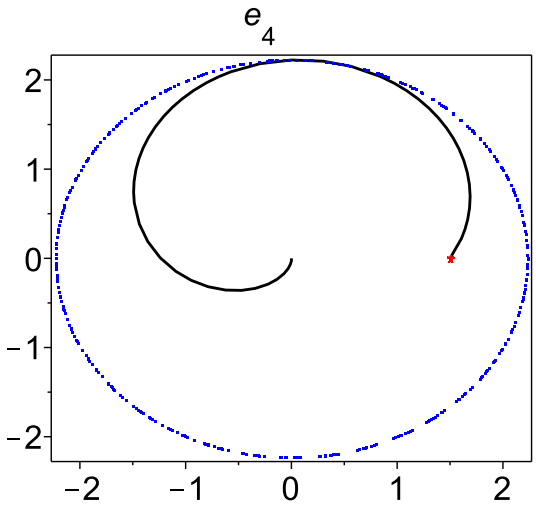


Figura 10.7: Potencial efectivo.



(a) (b)



(c)

Figura 10.8: Diferentes tipos de órbitas.

Bibliografía

[1] R. H. Price A. P. Lightman, W. H. Press and S. A. Teukolsy, *Problem book in relativity and gravitation*, Princeton University Press, Princeton, U.S.A., 1975.

[2] A. Einstein, *Zur elektrodynamik bewegter krper (sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento)*, Annalen der Physik. **322,10** (1905), 891–921.

[3] E. M. Landau, L. D. Lifshitz, *Física teórica en diez tomos. tomo ii. teoría de campos*, Ed. Fismatlit, Moscú, 2003.

[4] _____, *Física teórica en diez tomos. tomo vi. hidrodinámica*, Ed. Fismatlit, Moscú, 2003.

[5] Miguel. Le'on Portilla, *Ometeotl, el supremo dios dual, y tezcatlipoca "dios principal"*, Estudios de Cultura Náhuatl **30** (1999).

[6] Lorentz H. A. Weyl H. Minkowski, H., *The principle of relativity*, Dover, New York, 1923.

[7] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Academic Press, San Francisco, 1973.

[8] E. Mollerach, S. Roulet, *Gravitational lensing and microlensing*, ed. World Scientific, Centro Atómico Bariloche, Argentina, 2002.

[9] Henri. Poincaré, *La mesure du temps, revue de métaphysique et de morale*, **6** (1898), 1–13.

[10] _____, *Sur la dynamique de l'électron*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **21** (1905), 129–176.

[11] E. F. Taylor and J. A. Wheeler, *Spacetime physics*, Freeman and Co., San Francisco, U.S.A., 1963.

[12] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, ohn Wiley & Sons, New York, U.S.A., 1972.